33-01 $\boxed{n\text{ 次行列式の多重線形性}}$

$\boxed{\text{問}}$ 4 次行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ を列に関する多重線形性のみを用いて展開して $\sum a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}\left|\boldsymbol{e}_{i_1}\ \ \boldsymbol{e}_{i_2}\ \ \boldsymbol{e}_{i_3}\ \ \boldsymbol{e}_{i_4}\right|$ の形に展開するとき，$\left|\boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_3\ \ \boldsymbol{e}_3\right|$ の係数として表われる数値を答えよ．

33-01 $\boxed{n\text{次行列式の多重線形性}}$

$\boxed{\text{問}}$ 4 次行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ を列に関する多重線形性のみを用いて展開して $\sum a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}\left|\boldsymbol{e}_{i_1}\ \ \boldsymbol{e}_{i_2}\ \ \boldsymbol{e}_{i_3}\ \ \boldsymbol{e}_{i_4}\right|$ の形に展開するとき，$\left|\boldsymbol{e}_2\ \ \boldsymbol{e}_1\ \ \boldsymbol{e}_3\ \ \boldsymbol{e}_3\right|$ の係数として表われる数値を答えよ．

答: $\boxed{2 \times 2 \times 1 \times 1 = 4}$

33-02 $\boxed{n\text{次行列式の交代性}}$

$\boxed{\text{問}}$ 交代性と多重線形性を用いて $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

33-02 $\boxed{n\text{次行列式の交代性}}$

問 交代性と多重線形性を用いて $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ の値を求めよ.

答: $\boxed{3\ 2\ 1\ 4 \times (-1)^2 = 24}$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ.

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$d = -\,|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする．交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
d &= -\,|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|
\end{aligned}
$$

33-03 置換行列の行列式

$\boxed{\text{問}}$ $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{aligned}
d &= -\,|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -\,|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|
\end{aligned}
$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
d &= -\left|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\right| \\
&= \left|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\right| \\
&= -\left|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\right| \\
&= \left|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\right|
\end{aligned}
$$

33-03 $\boxed{\text{置換行列の行列式}}$

$\boxed{\text{問}}$ $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする．交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$

$$
\begin{aligned}
d &= -|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_4|
\end{aligned}
$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$\begin{aligned} d &= -|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\ &= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\ &= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\ &= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\ &= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_4| \\ &= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_7| \end{aligned}$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする．交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
d &= -|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7|
\end{aligned}
$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
d &= -\,|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -\,|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -\,|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= -\,|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7|
\end{aligned}
$$

33-03 置換行列の行列式

問 $\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^7$ における基本ベクトルとする． 交代性を用いて，$d = |\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4|$ を求めよ．

解

$$
\begin{aligned}
d &= -|\boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7\ \boldsymbol{e}_4| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= -|\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= |\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{e}_3\ \boldsymbol{e}_4\ \boldsymbol{e}_5\ \boldsymbol{e}_6\ \boldsymbol{e}_7| \\
&= 1
\end{aligned}
$$

33-04 $\boxed{\text{順列の反転数}}$

$\boxed{\text{問}}$ 次の順列の反転数を求め，符号 (± 1) を求めよ．

$\{1, 2, \ldots, 8\}$ の順列 $[3, 5, 1, 7, 4, 8, 6, 2]$

33-04 順列の反転数

問 次の順列の反転数を求め，符号 (± 1) を求めよ．

$\{1, 2, \ldots, 8\}$ の順列 $[3, 5, 1, 7, 4, 8, 6, 2]$

解

33-04 順列の反転数

問 次の順列の反転数を求め，符号 (± 1) を求めよ.

$\{1, 2, \ldots, 8\}$ の順列 $[3, 5, 1, 7, 4, 8, 6, 2]$

解

2 番目の 5 から最後の 2 まででで自分より大きい数が左にいくつかるかを数えて足す.

$0 + 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + 6 = 12$

33-04 順列の反転数

問 次の順列の反転数を求め，符号 (± 1) を求めよ．

$\{1, 2, \ldots, 8\}$ の順列 $[3, 5, 1, 7, 4, 8, 6, 2]$

解

2 番目の 5 から最後の 2 までで自分より大きい数が左にいくつかるかを数えて足す．

$0 + 2 + 0 + 2 + 0 + 2 + 6 = 12$

転倒数 (反転数) が 12 で偶数なので符号は $+1$