# 15-01 $\boxed{\text{行列とベクトルの積と１次写像}}$

$\boxed{\text{問}}$ $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x - y \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ はある行列 $A$ を用いて $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ と表される．$A$ を求めよ．

○ a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

○ c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

○ d. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

# 15-01 行列とベクトルの積と１次写像

問 $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し，$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3x + y \\ 4x - y \\ 2y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ はある行列 $A$ を用いて $\mathbf{v} = A\mathbf{u}$ と表される．$A$ を求めよ．

- ● a. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
- ○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

# 15-02 行列の型と１次写像の定まる空間の次元

$f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ をある線形写像 (線形性を持つ写像) とする．$f = T_A$ となる行列 $A$ を考える．$A$ は 3 行 4 列の行列であるという．$m, n$ を答えよ．

# 15-03 1次結合の1次写像による像の計算

問 線形写像 (1 次写像)$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ について,

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている. $f(3\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3)$ を求めよ.

# 15-03 1次結合の1次写像による像の計算

問 線形写像 (1 次写像)$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ について,

$$f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

を満たしている. $f(3\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3)$ を求めよ.

解 $3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$

# 15-04 一部の列ベクトルが指定された行列による像

問 ある行列 $A$ の 2 列目と 5 列目がそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるという．$A$ の定める 1 次写像 $f = T_A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ について，$\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルとするとき，$f(2\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_5)$ を求めよ．

# 15-04 一部の列ベクトルが指定された行列による像

問 ある行列 $A$ の 2 列目と 5 列目がそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であるという．$A$ の定める 1 次写像 $f = T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ について，$\boldsymbol{e}_i$ を $\mathbb{R}^m$ の基本ベクトルとするとき，$f(2\boldsymbol{e}_2 + 5\boldsymbol{e}_5)$ を求めよ．

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

# 15-05 1次結合の線形写像による像

問 ある線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について

$$f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

であることがわかっている. $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ となる $a, b$ が存在することを確かめ, $a, b$ を答えよ. また, $f(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix})$ を求めよ.

# 15-05 1次結合の線形写像による像

問 ある線形写像 $f:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ について

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix}$$

であることがわかっている. $\begin{pmatrix}-1\\3\\7\\11\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\3\end{pmatrix}$ となる $a,b$ が存在することを確かめ, $a,b$ を答えよ. また, $f\left(\begin{pmatrix}-1\\3\\7\\11\end{pmatrix}\right)$ を求めよ.

解 $a=2,\ b=3$ 像 $=\begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6\\9\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\13\\19\end{pmatrix}$

# 15-06 平面を直線に写す行列

問 3 次正方行列 $A$ によって定まる空間 ($\mathbb{R}^3$) の 1 次変換によって平面 $\pi : 2x - y - z = 3$ 全体はある直線に写るという．このような性質を持つ $A$ を次の中から選べ．1,2,0, 0,1,-1, 1,3,-1 2,3,1

- a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$
- e. 他の選択肢に条件を満たす行列はない．

# 15-06 平面を直線に写す行列

問 3 次正方行列 $A$ によって定まる空間 $(\mathbb{R}^3)$ の 1 次変換によって平面 $\pi : 2x - y - z = 3$ 全体はある直線に写るという．このような性質を持つ $A$ を次の中から選べ．1,2,0, 0,1,-1, 1,3,-1 2,3,1

- ○ a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
- ● b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
- ● d. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$
- ○ e. 他の選択肢に条件を満たす行列はない．

# 15-06 平面を直線に写す行列

問 3 次正方行列 $A$ によって定まる空間 ($\mathbb{R}^3$) の 1 次変換によって平面 $\pi : 2x - y - z = 3$ 全体はある直線に写るという．このような性質を持つ $A$ を次の中から選べ．1,2,0, 0,1,-1, 1,3,-1 2,3,1

○ a. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

● b. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 5 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

○ c. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

● d. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 \\ 5 & 1 & -13 \\ -3 & -1 & 9 \end{pmatrix}$

○ e. 他の選択肢に条件を満たす行列はない．

※ 平面を 1 点に写す行列を選択する問題の場合もある．

# 15-07 空間の１次変換による平面の像

問

平面 $\pi$ : $2x - y - z = 4$ の行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ による像はn

平面になる．その方程式を求めよ．

○ a．$2x + 4y - 3z = 26$

○ b．$17x - 4y - 8z = 28$

○ c．$4x + 7y + 5z = -10$

○ d．$4x + 3y + 7z = 48$