12-01 正方行列の積

問 次の正方行列の積のうち，$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ と一致するものをすべて選べ．

- ○ a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- ○ b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- ○ f. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12-01 正方行列の積

問 次の正方行列の積のうち，$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ と一致するものをすべて選べ．

- a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- b. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- e. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
- f. $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12-02 対角行列の定義と性質

問 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ にある対角行列をかけたところ $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ となった．どのような行列をどのようにかけたものか．次から選びなさい．

○ a. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左から

○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を右から

○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を左から

○ d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から

12-02 対角行列の定義と性質

問 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ にある対角行列をかけたところ $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 9 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ となった．どのような行列をどのようにかけたものか．次から選びなさい．

○ a. $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左から

● b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を右から

○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ を左から

○ d. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を右から

※ 対角成分以外が 0 である行列を対角行列という．

(i, i) 成分が α_i であるとき，$D(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ のように表す．

※ 対角行列同士の積は可換である．

※ $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を左からかけると各 i 行が α_i 倍される．

※ $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ を右からかけると各 i 列が α_i 倍される．

12-03 単位行列の定義と性質

問 次の行列のうち，単位行列を選びなさい．

- ○ a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ○ e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ f. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

12-03 単位行列の定義と性質

問 次の行列のうち，単位行列を選びなさい．

- ○ a. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- ● b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ● e. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ f. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

※ 単位行列: 対角成分がすべて 1 である対角行列.

※ 任意の $m \times n$ 行列 A に対して $E_m A = A E_n = A$ となる.

12-04 $\boxed{\text{逆行列の定義}}$

$\boxed{\text{問}}$ 次の行列のうち, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を選びなさい.

○ a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

○ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

12-04 逆行列の定義

問 次の行列のうち, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列を選びなさい.

- ● a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ b. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

※ n 次正方行列 A の逆行列 (A^{-1}): $AB = BA = E_n$ となる行列 B のこと.

※ $AB = CA = E_n \Rightarrow (CA)B = C(AB)$ より $B = C$

※ $AB = E_n$ となる B が存在 $\Leftrightarrow$ $CA = E_n$ となる C が存在

※ $A \neq O$ でも逆行列が存在しないこともある. e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

12-05 行列のべき乗

問 次の行列の n 乗を計算しなさい．ただし，n は整数である．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

12-05 行列のべき乗

問 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の -3 乗を選びなさい.

○ a. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

○ b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$

○ c. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{27} & 0 \end{pmatrix}$

○ d. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

12-05 行列のべき乗

問 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の -3 乗を選びなさい.

○ a. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

● b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$

○ c. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{27} & 0 \end{pmatrix}$

○ d. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

12-05 行列のべき乗

問 行列 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ の -3 乗を選びなさい.

- ○ a. $\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$
- ● b. $\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{27} \end{pmatrix}$
- ○ c. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{27} & 0 \end{pmatrix}$
- ○ d. $\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$

※ 対角行列 $D = D(a_1, a_2, \cdots, a_m)$

$$\Rightarrow D^n = D(a_1^n, a_2^n, \cdots, a_m^n)$$

(ただし, $a_1 a_2 \cdots a_m = 0$ のときは $n \in \mathbb{N}$ のみ)

※ $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の n 乗は $\begin{pmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ である.