線形代数 II 1-10
「解空間の基底と次元」

吉冨 賢太郎

2015

解空間

$A = (a_{ij})$:$m \times n$ 行列
V:斉次連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解空間 i.e. $=$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

例 1. $\mathbb{R}^3 \supset H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \;\middle|\; 2x + 3y - z = 0 \right\}$

例 2. $\mathbb{R}^4 \supset V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$

解空間の基底と次元

1. 係数行列 $\xrightarrow{\text{(行基本変形)}}$ 被約階段行列
2. 解のパラメータ表示 $t_1\boldsymbol{v}_1+\cdots+t_d\boldsymbol{v}_d$, $d=n-\operatorname{rank}A$
3. 各パラメータの係数となるベクトルが基底
4. パラメータの個数 d が次元

例 1. $\mathbb{R}^3 \supset H=\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, 2x+3y-z=0 \right\}$

係数行列 $A=(2 \quad 3 \quad -1) \to (1 \quad 3/2 \quad -1/2)$

$y=2t_1, z=2t_2 \to x=-3t_1+t_2$

$\to \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \to H=\left\langle \boldsymbol{v}_1=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$: 1 次独立 $\to [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 1 組の基底, $\dim H=2$

例 2

$$\mathbb{R}^4 \supset V = \left\{ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 2t_1, x_4 = 2t_2 \to x_1 = -2t_1 - 4t_2,\ x_2 = -t_1 + t_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ \boxed{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ \boxed{2} \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2} \qquad \to V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

$\to \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ ： 基底, $\dim V = 2$

解空間の基底（まとめ）

係数行列 A の連立 1 次方程式の解空間は
解のパラメータ表示を求めてベクトル表示するとき，
各パラメータの係数となるベクトルが基底をなす．
特に

$$\boxed{\text{解空間の次元} = \text{変数の数} - \text{係数行列の階数}}$$

問．斉次連立 1 次方程式の係数行列を被約階段行列にしたところ，
次のようになった．この方程式の解空間の基底と次元を答えなさい．

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$