線形代数 6.3.03
和と合成の表現行列

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

表現行列の定義の略記法

★表現行列の定義(成分による表現)

$f:V\to W$, $B_V=[\boldsymbol{v}_1,\dots,\boldsymbol{v}_m]$, $B_W=[\boldsymbol{w}_1,\dots,\boldsymbol{w}_n]$ のとき

$\Rightarrow$ 表現行列 $A=(a_{ij})$ の定義: $f(\boldsymbol{v}_j)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{w}_i$

★表現行列の定義(形式的な行ベクトルによる略記法)

$B_V=(\boldsymbol{v}_1\cdots\boldsymbol{v}_m)$, $B_W=(\boldsymbol{w}_1\cdots\boldsymbol{w}_n)$, $f(B_V)=(f(\boldsymbol{v}_1)\cdots f(\boldsymbol{v}_m))$

$\Rightarrow$ 表現行列 A の定義: $f(B_V)=B_WA$

注 略記法の両辺の第j 成分が成分による表示式と等しいことを確かめよ.

注 数ベクトルの場合 $f=T_M, P=(B_V), Q=(B_W)$とすると
$\Rightarrow$ 自然な行列の等式 $MP=QA$ が得られる.

注 B :形式的 m 次行ベクトル, $\boldsymbol{c}\in\mathbb{K}^m$ ($B\boldsymbol{c}$ は1次結合)
$\Rightarrow$ fの線形性は $f(B\boldsymbol{c})=f(B)\boldsymbol{c}$ となることに注意.

1次写像の和とスカラー倍

$f, g : V \to W$ 線型写像, $c \in \mathbb{K}$

和: $f + g : V \to W$: $(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$, スカラー倍 $(cf)(\boldsymbol{v}) = c(f(\boldsymbol{v}))$

$B_V, B_W : V, W$の基底, A, B : f, g の B_V,B_W に関する表現行列

$\Rightarrow$ $\underline{f+g \text{ の表現行列は } A+B,\ cf \text{ の表現行列は } cA}$

$\because$ $B_V = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$, $B_w = [\boldsymbol{w}_1, \dots, \boldsymbol{w}_m]$, $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i,\ g(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij}\boldsymbol{w}_i$$

$\therefore$ $(f+g)(\boldsymbol{v}_j) = f(\boldsymbol{v}_j) + g(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})\boldsymbol{w}_i$ $\quad\therefore$ $f+g$ の表現行列は $A+B$

$(cf)(\boldsymbol{v}_j) = cf(\boldsymbol{v}_j) = c(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i) = \sum_{i=1}^{m} ca_{ij}\boldsymbol{w}_i$ $\quad\therefore$ cf の表現行列は cA

※略記法(和): $(f+g)(B_V) = f(B_V) + g(B_V) = B_W A + B_W B = B_W(A+B)$

合成写像と表現行列

$f : V \to W,\ g : W \to Z$ 1次写像, B_V, B_W, B_Z 基底,

A, B : f, g の基底B_V, B_WおよびB_W, B_Zに関する表現行列

$\Rightarrow$ $\underline{g \circ f : V \to Z \text{ の} B_V, B_Z \text{ に関する表現行列} C \text{は } BA}$

$\because\ B_V = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_l],\ B_W = [\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_m],\ B_Z = [\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_n]$

$$f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i,\ g(\boldsymbol{w}_i) = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\boldsymbol{z}_k,\ g \circ f(\boldsymbol{v}_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\boldsymbol{z}_k$$

$$g(f(\boldsymbol{v}_j)) = g(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{w}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} g(\boldsymbol{w}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\boldsymbol{z}_k = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})\boldsymbol{z}_k$$

$$\therefore\ C = (c_{kj}) = BA$$

※略記法: $g \circ f(B_V) = g(f(B_V)) = g(B_W A) = g(B_W)A$ (g の線形性!)

$= (B_Z B)A = B_Z(BA)$ (形式的な行列の積の結合法則)

Q. 上の略記法で g の線形性を用いた部分を確かめよ.

合成写像の表現行列(具体例)

V, W, Z 2次元, $B_V = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ etc.

f の表現行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, g の表現行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

i.e. $f(\boldsymbol{v}_1) = a\boldsymbol{w}_1 + c\boldsymbol{w}_2$, etc.

$g(f(\boldsymbol{v}_1)) = g(a\boldsymbol{w}_1 + c\boldsymbol{w}_2) = ag(\boldsymbol{w}_1) + cg(\boldsymbol{w}_2) = a(p\boldsymbol{z}_1 + r\boldsymbol{z}_2) + c(q\boldsymbol{z}_1 + s\boldsymbol{z}_2)$

$= (ap + cq)\boldsymbol{z}_1 + (ar + cs)\boldsymbol{z}_2$

$g(f(\boldsymbol{v}_2)) = g(b\boldsymbol{w}_1 + d\boldsymbol{w}_2) = bg(\boldsymbol{w}_1) + dg(\boldsymbol{w}_2) = b(p\boldsymbol{z}_1 + r\boldsymbol{z}_2) + d(q\boldsymbol{z}_1 + s\boldsymbol{z}_2)$

$= (bp + dq)\boldsymbol{z}_1 + (br + ds)\boldsymbol{z}_2$

よって, $g \circ f$ の表現行列は $\begin{pmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}$

一方 $BA = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + cq & bp + dq \\ ar + cs & br + ds \end{pmatrix}$

次回「表現行列による1次写像の核と像の計算」