

線形代数 6.3.02 表現行列の定義と例

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版]に準拠しています。
スライドは <http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/> にあります。

数ベクトル空間の間の1次写像を表す行列(復習)

$F: \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ 線形写像 $\iff \exists A: m \times n$ 行列, $f = T_A$

$$A = (f(e_1) \ f(e_2) \ \cdots \ f(e_n))$$

i.e. つまり標準基底の写り先を列ベクトルとする行列

1次写像 $P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ (例えば微分) を

「座標空間を通して見る」

とどうなるか? 基底 $[1, x, x^2]$, $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x$ より

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow 行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ が対応 \Rightarrow 「表現行列」の考え

表現行列(導入)

注 基底(書き方) $B = [v_1, \dots, v_m]$, 順序の異なる基底は区別する.

問題 : $D : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ を1次写像とする. 基底 $[1, x, x^2]$ に関する座標を通して見るとこの写像は1次写像 $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ 行列で書けるはず!

$$\begin{array}{ccc} P_2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f} & P_2(\mathbb{R}) \\ \Phi \downarrow & \uparrow \Phi^{-1} & \downarrow \Phi \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

i.e. 座標写像 Φ は同型 \therefore 逆写像 Φ^{-1} も同型

$g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1} \therefore g$ は $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 線型写像 $\Rightarrow g = T_A$ となる A が定まる

例 D 微分の場合

$$\begin{array}{ccccc} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} & \xrightarrow{\Phi^{-1}} & a+bx+cx^2+dx^3 & \xrightarrow{f} & b+2cx+3dx^2 & \xrightarrow{\Phi} & \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \dashrightarrow & & & & & \\ & & & g & & & \end{array}$$

表現行列の導入2

例 $D : p(x) \mapsto p(x-1)$ (代入の場合)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a + bx + cx^2 + dx^3 \mapsto a + b(x-1) + c(x-1)^2 + d(x-1)^3$$

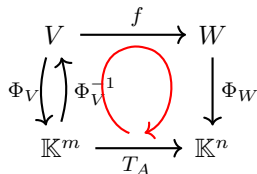
$$= (a - b + c - d) + (b - 2c + 3d)x + (c - 3d)x^2 + dx^3$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} a - b + c - d \\ b - 2c + 3d \\ c - 3d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$g = T_A, A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{表現行列}$$

表現行列(定義)

$f: V \rightarrow W$ 1次写像, $B_V, B_W: V, W$ の基底,
 $\Phi_V, \Phi_W: B_V, B_W$ によって定まる座標写像,
 $T_A = \Phi_W \circ f \circ \Phi_V^{-1}$ となる行列 A を
基底 B_V, B_W に関する f の表現行列 という.



注 表現行列は基底にとりかえによって変わる.

注 $V = W$ のときは原則として $B_V = B_W$ にとる.

注 Φ_V の制限 $\text{Ker } f \rightarrow \text{Ker } T_A$ は同型, Φ_W の制限 $\text{Im } f \rightarrow \text{Im } T_A$ は同型である.
 $\Rightarrow \text{rank } A = \text{rank } f, \dim \text{Ker } T_A = \dim \text{Ker } f$

注 写像の性質が表現行列でわかる (cf. 「表現行列の応用」)

表現行列の計算手順(まとめ)

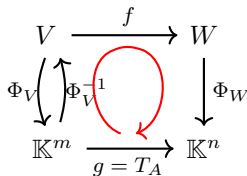
$g = T_A$ となる $A = (g(e_1) \ g(e_2) \ \cdots \ g(e_m))$

$\Rightarrow e_i \in \mathbb{K}^m \ g(e_i) = \Phi_W \circ f \circ \Phi_V^{-1}(e_i)$ を求める.

$B_V = [v_1, \dots, v_m] \Rightarrow \Phi_V^{-1}(e_i) = v_i$

$\Rightarrow f(\Phi_V^{-1}(e_i)) = f(v_i)$ を計算

$\Rightarrow g(e_i) = \text{「} f(v_i) \text{の} \Phi_W \text{に関する座標」}$



まとめると, 表現行列

= V の基底の各ベクトルを f で写した先の座標を並べて得られる行列

例題1

$f = D : P_3(\mathbb{R}) \rightarrow P_3(\mathbb{R})$ 微分写像の場合

$B_V = B_W = [1, x, x^2, x^3]$ で考える.

$$D(1) = 0 \text{ 座標: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(x) = 1 \text{ 座標: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x \text{ 座標: } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad D(x^3) = 3x^2 \text{ 座標: } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

表現行列は

$$A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例題2

線型写像 $D : P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(p(x)) = (x^2 - x) \frac{d^2 p(x)}{dx^2} + (2x + 1) \frac{dp(x)}{dx} - 2p(x)$$

で定めるとき, D の基底 $[1, x, x^2]$ に関する表現行列を求めよ.

(解) $D(1) = -2, \quad D(x) = 2x + 1 - 2x = 1,$

$$D(x^2) = 2(x^2 - x) + 2x(2x + 1) - 2x^2 = 4x^2$$

座標は順に $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\therefore \text{表現行列は } \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

注 特に $\text{rank } D = 2, \dim \text{Ker } D = 1(3 - \text{rank } D)$ とわかる.