# 線形代数 6.3.02
# 表現行列の定義と例

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

# 数ベクトル空間の間の1次写像を表す行列(復習)

$F : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ 線形写像 $\iff {}^\exists A : m \times n$行列, $f = T_A$

$$A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n))$$

i.e. つまり標準基底の写り先を列ベクトルとする行列

1次写像$P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$(例えば微分)を

「座標空間を通して見る」

とどうなるか? 基底 $[1, x, x^2]$, $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x$より

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ 行列 $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ が対応 $\Rightarrow$ 「表現行列」の考え

# 表現行列(導入)

注 基底(書き方) $B = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m]$, 順序の異なる基底は区別する.

$\boxed{\text{問題}}$ : $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ を1次写像とする. 基底 $[1, x, x^2]$ に関する座標を通して見るとこの写像は1次写像 $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ 行列で書けるはず!

$$\begin{tikzcd} P_2(\mathbb{R}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\Phi"'] & P_2(\mathbb{R}) \arrow[d, "\Phi"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"'] \arrow[u, shift right, "\Phi^{-1}"'] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

i.e. 座標写像 $\Phi$ は同型 $\therefore$ 逆写像 $\Phi^{-1}$ も同型

$g = \Phi \circ f \circ \Phi^{-1}$ $\therefore g$ は $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ 線型写像 $\Rightarrow g = T_A$ となる $A$ が定まる

例 $D$ 微分の場合

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi^{-1}} a+bx+cx^2+dx^3 \xrightarrow{f} b+2cx+3dx^2 \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \overset{g}{\dashrightarrow} \begin{pmatrix} b \\ 2c \\ 3d \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 表現行列の導入2

例 $D : p(x) \mapsto p(x-1)$ (代入の場合)

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a+bx+cx^2+dx^3 \mapsto a+b(x-1)+c(x-1)^2+d(x-1)^3$$

$$= (a-b+c-d)+(b-2c+3d)x+(c-3d)x^2+dx^3$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} a-b+c-d \\ b-2c+3d \\ c-3d \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$g = T_A,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ：表現行列

# 表現行列(定義)

$f: V \to W$ 1次写像, $B_V, B_W : V, W$の基底,
$\Phi_V, \Phi_W$ : $B_V, B_W$ によって定まる座標写像,
$T_A = \Phi_W \circ f \circ \Phi_V^{-1}$ となる行列 $A$ を
基底 $B_V, B_W$ に関する$f$ の表現行列という.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\ \mathbb{K}^m \arrow[u, shift right, "\Phi_V^{-1}"'] \arrow[r, "T_A"'] & \mathbb{K}^n \end{tikzcd}$$

注 表現行列は基底にとりかえによって変わる.

注 $V = W$ のときは原則として $B_V = B_W$ にとる.

注 $\Phi_V$の制限 $\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Ker}\, T_A$は同型, $\Phi_W$の制限 $\mathrm{Im}\, f \to \mathrm{Im}\, T_A$は同型である.

$$\Rightarrow \mathrm{rank}\, A = \mathrm{rank}\, f,\ \dim \mathrm{Ker}\, T_A = \dim \mathrm{Ker}\, f$$

注 写像の性質が表現行列でわかる (cf. 「表現行列の応用」)

# 表現行列の計算手順(まとめ)

$g = T_A$ となる $A = (g(\boldsymbol{e}_1)\ g(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ g(\boldsymbol{e}_m))$

$\Rightarrow \boldsymbol{e}_i \in \mathbb{K}^m\ g(\boldsymbol{e}_i) = \Phi_W \circ f \circ \Phi_V^{-1}(\boldsymbol{e}_i)$ を求める.

$B_V = [\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m] \ \Rightarrow \ \Phi_V^{-1}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{v}_i$

$\Rightarrow \ f(\Phi_V^{-1}(\boldsymbol{e}_i)) = f(\boldsymbol{v}_i)$ を計算

$\Rightarrow \ g(\boldsymbol{e}_i) =$ 「$f(\boldsymbol{v}_i)$ の$\Phi_W$に関する座標」

$$
\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "\Phi_V"'] & W \arrow[d, "\Phi_W"] \\
\mathbb{K}^m \arrow[u, shift right, "\Phi_V^{-1}"'] \arrow[r, "g = T_A"'] & \mathbb{K}^n
\end{tikzcd}
$$

まとめると, 表現行列

$=$ $\boxed{V \text{ の基底の各ベクトルを} f \text{で写した先の座標を並べて得られる行列}}$

# 例題1

$f = D : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ 微分写像の場合

$B_V = B_W = [1, x, x^2, x^3]$ で考える.

$D(1) = 0$ 座標: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D(x) = 1$ 座標: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D(x^2) = 2x$ 座標: $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$D(x^3) = 3x^2$ 座標: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

表現行列は

$$A = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \boldsymbol{a}_3 \ \boldsymbol{a}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# 例題2

線型写像 $D : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ を

$$D(p(x)) = (x^2 - x)\frac{d^2p(x)}{dx^2} + (2x+1)\frac{dp(x)}{dx} - 2p(x)$$

で定めるとき, $D$ の基底 $[1, x, x^2]$ に関する表現行列を求めよ.

(解) $D(1) = -2$, $\quad D(x) = 2x + 1 - 2x = 1$,

$$D(x^2) = 2(x^2 - x) + 2x(2x+1) - 2x^2 = 4x^2$$

座標は順に $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\therefore$ 表現行列は $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

注 特に $\operatorname{rank} D = 2$, $\dim \operatorname{Ker} D = 1(3 - \operatorname{rank} D)$とわかる.