線形代数 6.3.01
基底に関する座標

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

座標の例

例　部分空間 $U = x + y + 2z = 0$ の基底$B = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$$U \ni \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$(1, -1)$: 基底に関する座標 $\rightarrow$ ベクトルで表す $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Phi_B : U \ni \boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$$

が定まる. Φ_B : Bに関する座標写像と呼ぶ.

例　$P_2(\mathbb{R})$ の基底$B = [1, x, x^2]$をとると,

$$\Phi_B : P_2(\mathbb{R}) \ni a + bx + cx^2 \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

★ Φ_Bは同型写像

座標の定義

ベクトル空間 Vの基底 B が与えられているとき,

$\Rightarrow$ $\boldsymbol{v} \in V$に対し, 1次結合で一意的に書ける(係数が一意に決まる)

$\Rightarrow$ 係数を成分とする数ベクトルが一意に定まる.

★ V の基底 $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m]$ に対し, $\Phi_B : V \to \mathbb{R}^m$ を

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{v}_i \mapsto \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$ で定義 $\Rightarrow$ Φ_B 同型 (座標写像)

$\boldsymbol{x} = \Phi_B(\boldsymbol{v})$: B に関する $\boldsymbol{v}$ の座標

注 基底 B を成分とする形式的行ベクトル $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_m)$ も B と書けば$\boldsymbol{x}$のBに関する座標の定義は

$\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{x}$ となる数ベクトル $\boldsymbol{x} = \Phi_B(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{R}^m$

と書ける.

例題1

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ の次の基底に関する座標を求めよ.

(1) $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ (2) $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$ (3) $\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$

(1) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore$ 座標 $= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore$ 座標 $= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = p\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ を解く.

$\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \therefore$ 座標 $= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

例題3

$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ の次の基底に関する座標を求めよ.

$$(1)\ \left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] \qquad (2)\ \left[\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}\right]$$

(1) $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\therefore$ 座標 $\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\2&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p\\q\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ を解く.

$$\begin{pmatrix}1&1&0&1\\-1&0&1&3\\2&3&2&4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&4\\0&3&4&10\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&-1&-3\\0&1&1&4\\0&0&1&-2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&-5\\0&1&0&6\\0&0&1&-2\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 座標 $\begin{pmatrix}-5\\6\\-2\end{pmatrix}$ (検算 : $-5\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + (-2)\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$?)

例題3

$P_2(\mathbb{R}) \ni 1+3x+4x^2$ について次の基底に関する座標を求めよ.

(1) $[x, x^2, 1]$　　(2) $[1+x, x+x^2, 1+x^2]$

(1) $1+3x+4x^2 = (x\ x^2\ 1)\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$　$\therefore$ 座標は $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

(2) $1+3x+4x^2 = p(1+x)+q(x+x^2)+r(1+x^2)$

$$p+r=1,\ p+q=3,\ q+r=4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ 座標は $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$　検算: $0(1+x)+3(x+x^2)+1(1+x^2) = 1+3x+4x^2$

演習

$P_4(\mathbb{R}) \ni 1+2x+3x^2+x^4$ の次の各基底に関するの座標を求めよ.

(1) $[x^4, x^3, x^2, x, 1]$ (2) $[1, 1+x, 1+x+x^2, x^3+x^4, x^4]$

(答) (1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

発展課題

Q. $\mathbb{R}^2$ の2組の基底 $B_1 = [\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}]$ と $B_2 = [\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}]$ をとる. ベクトル $\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ の B_1 に関する座標 $\boldsymbol{v}_1$ と B_2 に関する座標 $\boldsymbol{v}_2$ の間にはどのような関係があるか. 一般の数ベクトルの2組の基底の場合, 公式を作ってみよう.

Q. $P_2(\mathbb{R})$ の2組の基底 $B_1 = [x^2, 1, x]$ と $B_2 = [1, x^2, 1+x]$ をとる. ベクトル $a + bx + cx^2$ の B_1 に関する座標 $\boldsymbol{v}_1$ と B_2 に関する座標 $\boldsymbol{v}_2$ の間にはどのような関係があるか. 一般の多項式空間の2組の基底の場合, 公式を作ってみよう.

※いずれも「基底の変換行列」で解説します.