線形代数 6.2.04
行列の定める1次写像の核と像(演習)

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

例1

$A=\begin{pmatrix}1&3&-1\\2&6&-2\end{pmatrix}$ の定める1次写像$f=T_A$:　　$A\to\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$ より

$\mathrm{Ker}\, f$の基底 : $[\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]=\left[\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, $\mathrm{Im}\, f$の基底 : $\boldsymbol{w}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

$f(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{w}$となる$\boldsymbol{v}$の例: $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$ は$\mathbb{R}^3$ の基底となっている.

例2

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&3&4\\1&1&0&2\\3&4&-1&6\end{pmatrix}$$ の定める1次写像 $f=T_A:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$

$$A\to\begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&-3&3&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\mathrm{Ker}\, f$の基底 : $\left[\boldsymbol{u}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{u}_2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$, $\mathrm{Im}\, f$の基底 : $\left[\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}\right]$

$\mathrm{Im}\, f$の基底に写る$\mathbb{R}^4$のベクトル $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$

$$(\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2)=\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$ はrank 4

$\Rightarrow$ 確かに $[\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2]$は$\mathbb{R}^4$の基底.