線形代数 6.2.03
1次写像の次元公式

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

解空間の次元と生成される部分空間の次元

$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_m) : n \times m$ 行列, $\operatorname{rank} A = r$

$$\dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = r$$

$$\dim \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\} = m - r$$

辺々加えると ... $r + (m - r) = m = \dim \mathbb{R}^m$

これを $f = T_A : V \to W$ の核と像の次元として考えると,

$$\boxed{\operatorname{rank} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V}$$

が成り立っている.

これを一般化しよう.

次元公式

命題 (次元公式)

$f : V \to W$ 線形写像に対し,

$$\operatorname{rank} f = \dim V - \dim \operatorname{Ker} f$$

$$(\text{or}\quad \operatorname{rank} f + \dim \operatorname{Ker} f = \dim V)$$

例　微分で定まる写像 $D = \dfrac{d}{dx} : P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \operatorname{Im} D = P_{n-1}(\mathbb{R})$

($\because$ $n-1$ 以下の多項式を"積分"したものは n 次以下でそれを微分すると元の多項式に戻る)

$$\therefore \operatorname{rank} D = n,\ \operatorname{Ker} D = \langle 1 \rangle \Rightarrow \dim \operatorname{Ker} D = 1$$

$\dim P_n(\mathbb{R}) = n + 1$ より,

$$\boxed{\dim P_n(\mathbb{R}) = \operatorname{rank} D + \dim \operatorname{Ker} D}$$

が成立.

証明

方針: $f : V \to W$ 1次写像, $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f = r$, $\dim \operatorname{Ker} f = t$ とする.

$[\boldsymbol{w}_1 = f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \boldsymbol{w}_r = f(\boldsymbol{v}_r)]$: $\operatorname{Im} f$ の基底, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$: $\operatorname{Ker} f$ の基底

$$\Rightarrow B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}: V \text{ の基底}$$

簡単のため, $r = 2$, $t = 3$ としておく.

$\boxed{V = \langle B \rangle}$ の証明

証明

方針: $f : V \to W$ 1次写像, $\operatorname{rank} f = \dim \operatorname{Im} f = r$, $\dim \operatorname{Ker} f = t$ とする.

$[\boldsymbol{w}_1 = f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, \boldsymbol{w}_r = f(\boldsymbol{v}_r)]$: $\operatorname{Im} f$ の基底, $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t$: $\operatorname{Ker} f$ の基底

$$\Rightarrow B = \{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_r\}: V \text{ の基底}$$

簡単のため, $r = 2$, $t = 3$ としておく.

$\boxed{B\text{の1次独立性}}$ の証明

問題

Q. 次元公式の証明を $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ の定める線形写像 $f = T_A$ の場合に照らしあわせて $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として何がとれるか考えてみよう. 具体的に $\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{v}_j$ をとって記述すること.

Q. 次元公式の証明を $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 8 \\ -1 & 2 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の定める線形写像 $f = T_A$ の場合に照らしあわせて $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ の基底として何がとれるか考えてみよう. 具体的に $\boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{w}_j, \boldsymbol{v}_j$ をとって記述すること.