線形代数 6.2.02
同型写像とrank

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

1次写像の合成の階数

★ $f:V\to W$, $g:U\to V$, $h:W\to Z$ 1次写像 $U \xrightarrow{g} V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{h} Z$

・g 全射 $\Rightarrow \mathrm{rank}(f\circ g)=\mathrm{rank}\,f$

$\because$ $\mathrm{Im}\,g=V$なので, $f\circ g(U)=f(V)=\mathrm{Im}\,f$より明らか.

・h 単射 $\Rightarrow \mathrm{rank}(h\circ f)=\mathrm{rank}\,f$

$\because$ h を $\mathrm{Im}\,f$上で考えたものを, h' とする

$\Rightarrow h':\mathrm{Im}\,f\to\mathrm{Im}\,h'$ は同型 $\Rightarrow \mathrm{rank}\,f=\dim\mathrm{Im}\,h'$

ここで, $\mathrm{Im}\,h'=h(f(V))=\mathrm{Im}\,h\circ f$ $\therefore \dim\mathrm{Im}\,h'=\mathrm{rank}(h\circ f)$

・特に g,h が同型ならば, $\mathrm{rank}\,f=\mathrm{rank}(h\circ f\circ g)$

行列の階数と1次写像の階数

・$F_r = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$ のとき, $\operatorname{rank} T_F = \operatorname{rank} F$ である.

・任意の$m \times n$行列Aは行および列に関する基本変形によって, F_rの形に変形できる. 特にm, n次の正則行列 P, Qによって $PAQ = F_r$となる.

・$f = T_A$, $h = T_P$, $g = T_Q$とすると, h, gは同型

$\Rightarrow \operatorname{rank} f = \operatorname{rank} h \circ f \circ g = \operatorname{rank} T_{F_r} = r = \operatorname{rank} A$となる.

すなわち, $\boxed{\operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A}$

注 特に, $\operatorname{rank} A$が基本変形に依存しないことが確認された.

生成される部分空間の次元

$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \in \mathbb{R}^n$とする.

・$\dim \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \operatorname{rank}(\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_m)$

$\because$ $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots \boldsymbol{a}_m)$とおく.

$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \rangle = \operatorname{Im} T_A$であるから, 左辺は $\operatorname{rank} T_A$である.

右辺は $\operatorname{rank} A$である.

$\operatorname{rank} T_A = \operatorname{rank} A$ であったから, 両辺は等しい. //

注 上は経験的にすでに明らかであるが, 理論的に示されたことになる.

次回「1次写像の次元公式」