

線形代数 6.2.01

1次写像の核と像

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版]に準拠しています。
スライドは <http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/> にあります。

行列の定める写像の核と像

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ に対し, $f = T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ を考える.

A の列ベクトルで生成される空間 $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow U = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$ と書ける.

解空間 $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ と書ける.

これを一般化しよう.

1次写像の核と像

$V, W/\mathbb{K}, f : V \rightarrow W$: 1次写像

★ f の像 $\text{Im } f := \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \subset W$ は部分空間

Q. 示せ.

★ f の核 $\text{Ker } f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\} \subset V$ は部分空間

Q. 示せ.

1次写像の核と単射性・階数の定義

★ f が単射 $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$

Q. 核の定義と同値性「 f 単射 $\Leftrightarrow f(v) = 0_W \Rightarrow v = 0_V$ 」から自明である. 確かめよ.

★ $\text{rank } f := \dim \text{Im } f$: f の階数(rank)

Q. $\text{rank } T_A$ と $\text{rank } A$ の関係は? \rightarrow 実は $\text{rank } T_A = \text{rank } A$?
 $\Rightarrow \text{rank } A$ が基本変形によらないことの論拠(後述)