

# 線形代数 6.2.01

## 1次写像の核と像

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版]に準拠しています。  
スライドは <http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/> にあります。

## 行列の定める写像の核と像

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$  に対し,  $f = T_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$  を考える.

$A$  の列ベクトルで生成される空間  $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow U = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$  と書ける.

解空間  $W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$  と書ける.

これを一般化しよう.

# 1次写像の核と像

$V, W/\mathbb{K}, f : V \rightarrow W$  : 1次写像

★  $f$  の像  $\text{Im } f := \{f(\mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in V\} \subset W$  は部分空間

Q. 示せ.

★  $f$  の核  $\text{Ker } f := \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_W\} \subset V$  は部分空間

Q. 示せ.

# 1次写像の核と単射性・階数の定義

★  $f$ が単射  $\Leftrightarrow \text{Ker } f = \{0\}$

Q. 核の定義と同値性「 $f$  単射  $\Leftrightarrow f(v) = 0_W \Rightarrow v = 0_V$ 」から自明である. 確かめよ.

★  $\text{rank } f := \dim \text{Im } f$ :  $f$  の階数(rank)

Q.  $\text{rank } T_A$  と  $\text{rank } A$  の関係は?  $\rightarrow$  実は  $\text{rank } T_A = \text{rank } A$  ?  
 $\Rightarrow \text{rank } A$  が基本変形によらないことの論拠(後述)