線形代数 6.1.03
1次写像と単射性・全射性・同型

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

線型写像と単射性

★ $f : V \to W$ を線型写像とする. このとき:

$$f \text{ が単射} \Leftrightarrow f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W \text{ となる } \boldsymbol{v} \text{ は } \mathbf{0}_V \text{ のみ.}$$

$\because$ $(\Rightarrow)$ fは線形写像だから $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$ である.

$f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$ とする. $f(\boldsymbol{v}) = f(\mathbf{0}_V)$ だから, f が単射ならば $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$ となる.

すなわち, $f(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}_W$ならば $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}_V$である.

Q. 逆を示せ.

線型写像の単射性と1次独立性

$f: V \to W$ を線形写像, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \in V$とする.

★ $f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ が1次独立ならば $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は1次独立.

★ f 単射のとき, 上の逆が成り立つ. すなわち,

f が単射, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 1次独立ならば $\Rightarrow f(\boldsymbol{v}_1), \ldots, f(\boldsymbol{v}_m)$ 1次独立.

<u>特に単射 $f: V \to W$が存在するならば $\dim V \leqq \dim W$</u>

Q. 下線部「特に...」の部分を説明せよ.

Q. 任意の1次独立なVのベクトルの系を 1次独立なWのベクトルの系に写すような1次写像fは単射であることを示せ.
ヒント:1つのベクトルが1次独立であることは$\mathbf{0}$でないことと同値.

線型写像と全射性

$f : V \to W$:線型写像, SをVを生成する任意の集合:$V = \langle S \rangle$とする.

★ f が全射$\Leftrightarrow$ $W = \langle f(S) \rangle$ ただし, $f(S) = \{f(\boldsymbol{v}) | \boldsymbol{v} \in S\}$

<u>特に全射が存在 $\Rightarrow \dim V \geqq \dim W$</u>

$\because S = \{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ とする(簡単のため有限集合とする).

$(\Rightarrow)$ f 全射と仮定する.

$\boldsymbol{w} \in W$を任意のベクトルとすると, $\boldsymbol{v} \in V$が存在して $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$.

$V = \langle S \rangle$ より c_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ がとれて, $\boldsymbol{v} = \sum c_i \boldsymbol{v}_i$.

$\boldsymbol{w} = f(\boldsymbol{v}) = \sum c_i f(\boldsymbol{v}_i) \in \langle f(S) \rangle$ である.

Q. $(\Leftarrow)$ を示せ.

Q. 下線部「特に...」を示せ

同型写像とベクトル空間の同型

全単射な同型 $f : V \to W$が存在するとき, V とWは同型という.

(1) $f : V \to W$ が同型(全単射な線型写像) $\Rightarrow \dim V = \dim W$

(2) $\dim V = \dim W \Rightarrow$ 同型 $f : V \to W$ が存在.

(3) V と W が同型 $\Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

$\because$ (1) : $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$: V の基底, f 同型ならば, fの単射性より
$\dim V \leqq \dim W$ fの単射性より $\dim V \geqq \dim W$. $\therefore \dim V = \dim W$

Q. (2)を示せ.

注 (3)は (1), (2)と同型の定義から明らか.

次回「1次写像の核と像の定義」