# 線形代数 6.1.02
# 1次写像の合成と逆写像・基底の像

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

# 1次写像の合成写像

★ $f : V \to W$ , $g : W \to Z$ 1次写像 $\Rightarrow$ $g \circ f : V \to Z$ 1次写像

$\because$

# 1次写像の逆写像

★ $f : V \to W$ 1次写像かつ全単射 $\Rightarrow$ $f^{-1}$ 1次写像

$\because$

注 全単射な1次写像を同型写像という. ベクトル空間の間に同型写像が存在するのは次元が等しいときに限られることがわかる(後述).

# 1次写像の和とスカラー倍

★ $f, g : V \to W$ 1次写像, $c \in \mathbb{K}$のとき, $f+g$, $cf$を以下のように定義すると $f+g, cf$ も1次写像:

任意の$\boldsymbol{v} \in V$に対し, $(f+g)(\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{v}) + g(\boldsymbol{v})$ ,　$(cf)(\boldsymbol{v}) = c(f(\boldsymbol{v}))$

注 上は, $V$から$W$への1次写像全体がベクトル空間になることを示唆している. (確かめよ). 数ベクトル空間$\mathbb{K}^n$から$\mathbb{K}^m$への1次写像は$m \times n$行列に対応するが, この対応が線形性を持つことがわかる.

**Q.** 上の注を確かめよ.

# 1次写像の決定と基底

★ $\boxed{\text{任意の1次写像 } f: V \to W \text{ は}V\text{の1組の基底 } B \text{ の像 } f(B) \text{ が定まれば, 写像として定まる.}}$

注 $B = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n)$ のとき, $f(B) = (f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n))$ とする.

例 $D: P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ が $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x, D(x^3) = 3x^2$ で定まる
線型写像 $\Rightarrow D(a + bx + cx^2 + dx^3) = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot (2x) + d \cdot (3x^2)$
$= b + 2cx + 3dx^2 = (a + bx + cx^2 + dx^3)'$

すなわち, 微分$D$は $D(1) = 0, D(x) = 1, D(x^2) = 2x, D(x^3) = 3x^2$をみたす
(唯一の)1次写像と言える.