線形代数 6.1.01
1次写像の定義と例・基本性質

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

行列の定める写像の復習と1次写像の定義

A:$m \times n$ 行列に対し, $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$: A の定める写像

性質: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{K}^n, c \in \mathbb{K}$ のとき,

$$T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{y} = T_A(\boldsymbol{x})+T_A(\boldsymbol{y})$$

$$T_A(c\boldsymbol{x}) = A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x}) = cT_A(\boldsymbol{x})$$

i.e $\boxed{T_A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = T_A(\boldsymbol{x})+T_A(\boldsymbol{y}),\ T_A(c\boldsymbol{x}) = cT_A(\boldsymbol{x})}$

・ベクトル空間 V, W, $f : V \to W$ が線形性を持つ

$\Leftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V, c \in \mathbb{K}$ に対し,

$$\boxed{f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y}),\ f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})}$$

が成り立つこと.

・線形性を持つ写像 $=$ 1次(線形・線型)写像(Linear Map)

1次写像の例

例 $T_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ は1次写像

例 $D = \dfrac{d}{dx} : P_4(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), p(x) \mapsto p'(x)$ (微分) i.e. $D(p(x)) = p'(x)$

Q. $g(x)$を与えられた多項式(定数でもよい)とする. 以下は1次写像か?

- 多項式をかける: $f(p(x)) = g(x)p(x)$, $p(x) \in P(\mathbb{R})$ (以下略)
- 多項式をたす: $f(p(x)) = p(x) + g(x)$
- 積分する: $f(p(x)) = \displaystyle\int_0^x p(t)dt$
- gをかけて積分する: $f(p(x)) = \displaystyle\int_0^x g(t)p(t)dt$
- 多項式に代入する: $f(p(x)) = p(g(x))$

注 線型写像の f と多項式 $f(x)$とを混乱することがある. 線型写像は大文字で表すなど, 決めておこう. 以下は多項式では大文字FやDを使うことにする.

線形写像の基本性質

★線型写像$f : V \to W$ は $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}$ にうつす: $f(0_v) = 0_W$

★ $f : V \to W$ が線形写像である

$\Longleftrightarrow$ 任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2)$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $m \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ に対し

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_m f(\boldsymbol{v}_m)$$

注 上の言い換えは「 1次結合を'保つ'」と表現できる.

Q. 上の同値性を証明せよ.

線形写像の基本性質

★線型写像$f : V \to W$ は $\mathbf{0}$ を $\mathbf{0}$ にうつす: $f(0_v) = 0_W$

★ $f : V \to W$ が線形写像であるための必要十分条件

$\Longleftrightarrow$ 任意の $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$ と $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ に対して

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + c_2 f(\boldsymbol{v}_2)$$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $m \in \mathbb{N}, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ に対し

$$f(c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m) = c_1 f(\boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_m f(\boldsymbol{v}_m)$$

注 上の言い換えは「 1次結合を'保つ'」と表現できる.

Q. 上の同値性を証明せよ.

線型写像の例と線形でない例(数ベクトル)

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ は2次行列 A で $f=T_A$ と書ければ線形. 以下は線形か?

(1) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x+y \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ xy \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y+1 \\ 2x-3y+2 \end{pmatrix}$

(*) $f:\mathbb{K}^n\to\mathbb{K}^m$ 線形写像 $\Leftrightarrow$ $f=T_A$ ($\exists A:m\times n$行列)

$\Rightarrow$ 数ベクトル空間の間の線型写像は行列によって定まるものに限る

$\Rightarrow$ 線形かどうかの判定は容易

Q. (*)の同値性を示せ.

線型写像の例と線形でない例(多項式)

$g(x)$: m 次の多項式とする.

★ $F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_{nm}(\mathbb{R})$, $F(p(x)) = p(g(x))$ (代入)

例 $p(x) \mapsto p(c)$, $p(x) \mapsto p(x^2)$, $p(x) \mapsto p(2x+1)$

★ $F\colon P_n(\mathbb{R}) \to P_{n+m}(\mathbb{R})$, $F(p(x)) = p(x)g(x)$ ($g(x)$ をかける)

例 $p(x) \mapsto x^2 p(x)$, $p(x) \mapsto (2x+1)p(x)$

注 上の例で確かに0 が 0 に写っていることに注意.

線形写像にならない例

★ $f(p(x)) = p(x) + g(x)$ (足し算)

★ $f(p(x)) = p(x)^m$, $m > 1$ (べき乗)

Q. 上の例が線形写像にならないことを示せ

次回「1次写像の合成と逆写像」