線形代数 5.4.04
「直和」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

直和

$V \supset U, W$, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ のとき, $U + W$ を直和といい, $U \oplus W$ で表す.

次元の関係式より $U + W = U \oplus W \Leftrightarrow \dim(U + W) = \dim U + \dim W$

★ m 個の部分空間の直和

$V \supset U_1, \ldots, U_m$ 部分空間, $W = U_1 + U_2 + \cdots + U_m$ が直和

$\Leftrightarrow \dim W = \sum_{i=1}^{m} \dim U_j$

$\Leftrightarrow U_1, U_2, \ldots, U_m$ の $\mathbf{0}$ でないベクトルは1次独立

$\Leftrightarrow$ 任意の $\boldsymbol{w} \in W$ は $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \boldsymbol{u}_m$, $\boldsymbol{u}_j \in U_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ と一意に書ける

このとき, $W = U_1 \oplus U_2 \oplus \cdots \oplus U_m$ と書く

直和の例

例 $\mathbb{R}^3 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \mathbb{R}^3 = U \oplus W$

例 $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

例 $\mathbb{R}^4 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \oplus \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

例 $P_2(\mathbb{R}) \supset U = \langle 1 \rangle,\ W = \left\langle x, x^2 \right\rangle \to P_2(\mathbb{R}) = U \oplus W$

例 $P_2(\mathbb{R}) = \langle 1 \rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \left\langle x^2 \right\rangle$

例 $P_4(\mathbb{R}) = \left\langle 1, x^2 \right\rangle \oplus \langle x \rangle \oplus \left\langle x^3, x^4 \right\rangle$

3つ以上の直和の注意

$U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$, $U_2 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$, $U_1 \cap U_3 = \{\mathbf{0}\}$ (*)

は直和の条件ではない.

例 $U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle, U_3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$は(*) を満たす

$\mathbb{R}^2 = U_1 + U_2 + U_3$ だが $\mathbb{R}^2 \neq U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$

$U_1 + U_2 + \cdots + U_m$が直和

$$\Leftrightarrow U_1 \cap U_2 = (U_1 + U_2) \cap U_3 = \cdots = (U_1 + \cdots + U_{m-1}) \cap U_m = \{\mathbf{0}\}$$

Q. 上の$\Leftrightarrow$を示せ.

Q. $\mathbb{R}^6$ の解空間を3つ考えることによって, (*)の条件を満たすが, 直和にならない例を構成せよ.