線形代数 5.4.03
「解空間の共通部分」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

例題

$\mathbb{R}^4$ の部分空間 U, W：

$$U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} \text{ 基底 } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \dim U = 2$$

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} \text{ 基底 } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \dim W = 2$$

$$U \cap W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\} = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \right\}$$

基底 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \dim U \cap W = 1$

例題(続き)

Uの基底 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$, Wの基底 $\begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$U+W=\left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\begin{pmatrix}1&1&3&-1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ $\therefore$ 関係式は $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ のみ

よって, 基底として $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ がとれて

$$\dim(U+W) = 3 = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

解空間の共通部分(まとめ)

$A,\ B$: m 列の行列,

U, W : A, Bを係数行列とする斉次連立1次方程式の解空間

$$U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^m,\ W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m | B\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \subset \mathbb{R}^m$$

$U \cap W$ も解空間 ... 係数行列 $= \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$

Q. $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ とすると, $U \cap W$ は明らかに $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ である. このことを U, Wを解空間として表すことによって説明せよ.

注 一般には, 生成する部分空間を解空間として実現する方法は直交補空間の概念を用いて説明される.

次回「直和の定義」