# 線形代数 5.4.02
# 「部分空間の共通部分と和空間の次元」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

# 前回の例の復習

$$\mathbb{R}^3 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U+W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$$

$\dim(U+W) = 3,\ \dim U + \dim W = 2+2$

$$\Rightarrow \dim(U+W) = \dim U + \dim W - 1$$

'1' の正体 ... $= \dim U \cap W$

実際: $U \cap W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle,\ \dim(U \cap W) = 1$

**Q.** $U \cap W$ が部分空間になることを示せ

# 和空間の次元

## 命題

$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

略証) $\dim(U \cap W) = 2, \dim U = 3, \dim W = 4$ の場合に示す

$U \cap W$ の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] \to U, W$ の基底に延長可

$U$の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1$， $W$の基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$

特に $U = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$

$$\therefore U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$$

あとは, $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ の1次独立性を示せばよい

$$a_1 \boldsymbol{u}_1 + b_1 \boldsymbol{v}_1 + b_2 \boldsymbol{v}_2 + c_1 \boldsymbol{w}_1 + c_2 \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{0}$$

とおいて, (1) を示せばよい.

# 和空間の次元(証明の続き)

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ の1次独立性を示す.

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0} \qquad \cdots \quad (*)$$

とする.

$$a_1\boldsymbol{u}_1 + b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 = -c_1\boldsymbol{w}_1 - c_2\boldsymbol{w}_2 \in U \cap W = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$$

$$\therefore a_1\boldsymbol{u}_1 + b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 = b_1'\boldsymbol{v}_1 + b_2'\boldsymbol{v}_2$$

$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ の1次独立性より, $a_1 = 0$

(*) に代入して,

$$b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + c_1\boldsymbol{w}_1 + c_2\boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$$

$W$ の基底の1次独立性より

$$b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$$

□

# まとめと補足

- 和空間の次元は単純の元の空間の次元を足したものではない.
- $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

注 ある集合 $X$ の有限部分集合 $A, B$ について,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

が成り立つのに似ている.

次回:「解空間の共通部分」