線形代数 5.4.01
「部分空間の和空間」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

部分空間の和集合

$V \supset U, W$ 部分空間 $\Rightarrow$ 和集合 $U \cup W$: 部分空間 ?

一般にならない: $\mathbb{R}^2 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle, W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\because \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U \cup W, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U \cup W$

i.e. U と W のベクトルの和は一般に $\notin U \cup W$

Q. 和集合$U \cup W$が和空間になる場合はどのような場合か考えよ.

和集合の代替 $\rightsquigarrow$ 和空間 =和集合を含む最小の部分空間

和空間の定義

定義

$U, W \subset V$ のとき,

$$\{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}:$$

はV の部分空間であり, $U + W$ と書いて U と W の和空間という.

Q. $U + W$は実際部分空間となることを示せ.

注 一般にk個の部分空間 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ についても

和空間 $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} U_j = U_1 + U_2 + \cdots + U_k$が同様に定義される.

例

- $\mathbb{R}^3 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ のとき, $U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

- $P_2(\mathbb{R}) \supset U = \langle 1, x \rangle, W = \left\langle x, x^2 \right\rangle$

  $U \ni \boldsymbol{u} = a + bx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $W \ni \boldsymbol{v} = cx + dx^2$, $c, d \in \mathbb{R}$

  $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} =$

例題1

$\mathbb{R}^3 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle$ のとき, $U+W$ の基底と次元を求めよ.

$$\begin{aligned} U+W &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

基底: $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ($\mathbb{R}^3$ の基底なら何でもよい).

注 次元の関係式 : ? $2+2=3$!!
$\dim U+W = \dim U + \dim W$ とは限らない.

例題2

$\mathbb{R}^4 \supset U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ のとき, $U + W$ の基底と次元を求めよ.

(解) $U + W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^4$

この場合は $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ が成り立つ.

Q. $\dim(U + W) = \dim U + \dim W$ が成り立たない場合があるのはどのようなケースか予想しよう.

生成される部分空間の和空間(まとめ)

$V \supset U$, W, $U = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$, $W = \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l \rangle$

$\Rightarrow U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l \rangle$

$\because$ U, W の任意のベクトルは

$U \ni \boldsymbol{u} = c_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m \boldsymbol{u}_m$,

$W \ni \boldsymbol{w} = d_1 \boldsymbol{w}_1 + \cdots + d_l \boldsymbol{w}_l$

とかける.

$\therefore$ $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}=c_1\boldsymbol{u}_1+\cdots+c_m\boldsymbol{u}_m+d_1\boldsymbol{w}_1+\cdots+d_l\boldsymbol{w}_l$

$U + W$ は $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ 全体で $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l$ の1次結合全体と等しい.

i.e. $U + W = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_l \rangle$ $\square$

次回:「部分空間の共通部分と和空間の次元」