線形代数 5.3.05
「基底の存在と性質」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

基底であるための同値条件

⓪ 「ベクトル空間 V のベクトルの系 B は V の基底である」

は次の条件①, ②と同値.

① B は V の極小な(=これ以上減らせない)生成系である:

$$B' \subset B,\ B' \neq B \Rightarrow V \neq \langle B' \rangle$$

Q. ⓪ $\Leftrightarrow$ ① を示せ.

ヒント: $\Rightarrow$: $V = \langle B' \rangle$ として矛盾を出す.

$\Leftarrow$: Bが1次従属と仮定するとどうなるか.

② B は V の極大な(これ以上増やせない)1次独立系である:

$$V \supset B' \supset B,\ B' \neq B \Rightarrow B' \text{ 1次従属}$$

Q. ⓪ $\Leftrightarrow$ ② を示せ.

基底と次元の性質

命題

$\dim V = n$ のとき,

1. n 個の1次独立なベクトルは基底である.
2. n 個の V を生成するベクトルは基底である.

例 $B = \left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right]$ 1次独立 $\to$ $B : \mathbb{R}^3$ の基底

実際 $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ は<u>一意解</u> (a, b, c) を持つ

例 $B = [1, 1+x, 1+x^2] \subset P_2(\mathbb{R})$ 1次独立 $\to$ $B : P_2(\mathbb{R})$ の基底

実際, $p + qx + rx^2 = a + b(1+x) + c(1+x^2)$ は a, b, c について<u>一意解</u> (a, b, c) を持つ

基底の存在

これまでの議論から基底の存在が示される:

「V が有限個のベクトルの系 S で生成されるのであれば有限個のベクトルからなる基底がとれる」

Q. 示せ.