線形代数 5.3.04
「解空間の基底と次元」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

解空間(復習)

$A=(a_{ij})$:$m\times n$行列, V:斉次連立1次方程式 $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$の解空間 i.e.

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right\}$$

例 $A=(2\ 3\ \ -1)\to V=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ \middle|\ 2x+3y-z=0\right\}\subset\mathbb{R}^3$

例 $A=\begin{pmatrix}2&6&5&1\\1&4&3&0\\1&2&2&1\end{pmatrix}\to V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}2&6&5&1\\1&4&3&0\\1&2&2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\right\}\subset\mathbb{R}^4$

例題1

例　$A = (2\ 3\ \ -1)$ を係数行列とする1次方程式の解空間 i.e.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \ 2x + 3y - z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$y = 2t_1\ ,\ z = 2t_2 \Rightarrow x = -3t_1 + t_2$$

$$\therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t_1 \underset{\boldsymbol{v}_1}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} + t_2 \underset{\boldsymbol{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}} \qquad \therefore H = \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow t_1 = t_2 = 0$ よって, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$: 1次独立

よって $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ 1組の基底, $\dim V = 2$

例題2

係数行列：$A=\begin{pmatrix}2&6&5&1\\1&4&3&0\\1&2&2&1\end{pmatrix}$ $V=\left\{\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\ \middle|\ \begin{pmatrix}2&6&5&1\\1&4&3&0\\1&2&2&1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\right\}\subset\mathbb{R}^4$

$$A\to\begin{pmatrix}1&4&3&0\\0&2&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&2\\0&1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_3=2t_1, x_4=2t_2$
$\Rightarrow x_1=-2t_1-4t_2,$
$x_2=-t_1+t_2$

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=t_1\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\\boxed{2}\\0\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_1}+t_2\underbrace{\begin{pmatrix}-4\\1\\0\\\boxed{2}\end{pmatrix}}_{\boldsymbol{v}_2}$$

$\therefore V=\langle\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\rangle$ かつ
$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}\Rightarrow t_1=t_2=0$より
$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$ は1次独立

$\therefore [\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2]$ は基底で $\dim V=2$

解空間の基底と次元(まとめと演習)

Aを係数行列とする連立1次方程式の解空間 $V = \{\boldsymbol{x} | A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ の基底と次元

1. Aを被約階段行列に変形して解のパラメータ表示を求める:

$$\boldsymbol{x} = t_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + t_d\boldsymbol{v}_d \ , \ d = n - \operatorname{rank} A$$

2. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d \rangle$ かつ1次独立 $\quad \Rightarrow [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d]$は基底.
3. $\dim V = d$ (=パラメータの個数)

Q. 斉次連立1次方程式の係数行列を被約階段行列にしたところ, 次のようになった. この方程式の解空間の基底と次元を答えなさい.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

次回: 「基底の性質と存在」