線形代数 5.3.03
「生成される部分空間の基底と次元」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

生成される部分空間(復習)

V ベクトル空間 $/\mathbb{K}$, $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m]$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$

$$\langle B \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{v}_i \,\middle|\, c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{K} \right\}$$

$$\mathbb{R}^2 \supset \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \{\mathbf{0}\}, \qquad \mathbb{R}^2 \supset \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2,$$

$$\mathbb{R}^2 \supset \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{直線 } y = 2x,$$

$$\mathbb{R}^3 \supset \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{平面 } x + y + z = 0$$

$$P_2(\mathbb{R}) = \langle 1, x, x^2 \rangle \supset \{f(x) \in P_2(\mathbb{R}) | f(0) = 0\} = \langle x, x^2 \rangle$$

基底を選ぶ

$\boxed{B\ \text{1次従属の場合}}$ が重要

例: $\mathbb{R}^3 \supset B = \left\{ \underset{\boldsymbol{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_2}{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_4}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \right\}$, $V = \langle B \rangle$

$\Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3$:1次独立

(注) $B\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: 解のパラメータ表示

$\Rightarrow [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3]$: V の基底, $\dim V = 2$

例題1

$V = \langle \boldsymbol{v}, 2\boldsymbol{v} \rangle$, $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$　(注 $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}$)

$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 = c_1\boldsymbol{v} + c_2(2\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

$\Leftrightarrow (c_1 + 2c_2)\boldsymbol{v} = \mathbf{0} c_1 + 2c_2 = 0 \ (\because \ \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0})$

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$. $t \neq 0$ な値 (e.g.$t = 1$) $\Rightarrow$ 例えば $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$-2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \mathbf{0}$ i.e. $\boldsymbol{v}_2 = 2\boldsymbol{v}_1$

※当然だが, それ以外には「関係」がないことも示している!!

$\Rightarrow V = \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}$ が基底, $\dim V = 1$

例題2

$$\mathbb{R}^4 \supset \left\langle \underset{\boldsymbol{v}_1}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_2}{\begin{pmatrix}1\\0\\1\\-1\end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_3}{\begin{pmatrix}2\\2\\0\\2\end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_4}{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}} \right\rangle$$ の基底と次元を求めよ

$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 + c_4\boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{0}$ より

$$\begin{pmatrix}1&1&2&0\\1&0&2&1\\0&1&0&-1\\1&-1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix} = \boldsymbol{0} \to \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&-1&0&1\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{v}_4)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = t_1\begin{pmatrix}-2\\0\\1\\0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\therefore \begin{cases} -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_3 = 0 \\ -\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_4 = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} \boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 \\ \boldsymbol{v}_4 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$ かつ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ は1次独立

$\therefore \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$: 基底. $\dim V = 2$

手順まとめ

$\boxed{\langle B\rangle = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\rangle \text{ の基底と次元}}$

1. $c_1, \ldots, c_m$ の方程式

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{0}$$

の解のパラメータ表示 $\boldsymbol{c} = t_1\boldsymbol{p}_1 + \cdots + t_k\boldsymbol{p}_k$ を求める.

注 $\boldsymbol{c} = 0$のみならば1次独立 $\Rightarrow$ Bは基底

2. $\boldsymbol{p}_1, \ldots, \boldsymbol{p}_k$ を用いて k 個の$\underbrace{\text{'不要'なベクトルたち}}_{B_1}$を除く.

例 $k = 1$, $\boldsymbol{p}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{v}_4 = -2\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_4$は不要 etc. $B_1 = \{\boldsymbol{v}_4\}$

3. $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m\} \supset B_0 = B \setminus B_1$ 1次独立 $\Rightarrow$ B_0 は1組の基底

4. 次元 $d = m - k$

補足と演習

命題

$$V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim V = r = \operatorname{rank}(\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)$$

Q. 「まとめ」を使って証明を考えよう.

Q. 次の空間の基底を生成するベクトルから選んで答えよう.

$$\mathbb{R}^5 \supset \left\langle \underset{\boldsymbol{v}_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_4}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}, \underset{\boldsymbol{v}_5}{\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}} \right\rangle$$

次回:「解空間の基底と次元」

解答例 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_4]$, $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_5]$ などはいずれも正解. ($\boldsymbol{v}_3 = 2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_5 = -\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + 3\boldsymbol{v}_3$ となる. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ から2つ選んで, $\boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{v}_5$ のいずれかを合わせればよい.)