# 線形代数 5.3.02 「次元の定義」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

# 基底のおさらいと補足

ベクトル空間 $V$, $B = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m] \subset V$ が $V$ の基底

$\Leftrightarrow$ $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$ かつ $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ 1 次独立.

**注** 系 $B$ に対して上を「$V = \langle B \rangle$, $B$ は 1 次独立」と略記する.

**注** 形式的行ベクトル $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_m)$ も $B$ で表す: $\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^m$ と書ける.

**注** 基底かどうかは順序に無関係. ただし, 順序の異なる '系' は基底として**異なる**.

**注** $B$ が $V$ の基底 $\Leftrightarrow$ $V$ の任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対し,

$$\boldsymbol{v} = B\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m \text{ となる } \boldsymbol{x} \text{ がただ一つ存在.}$$

# 簡単な例

**例** $V = \mathbb{R}^3$ の基底の例: $\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ (標準基底)

**例** $V = P_2(\mathbb{R})$ の基底の例: $[1, x, x^2]$ がとれる

**例** $V = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0\right\}$ の基底の例: $\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$

**例** $W = \{f(x) \in P_2(\mathbb{R}) | f(0) = 0\} \subset P_2(\mathbb{R})$ の基底の例: $[x, x^2]$

# $n$ 個で生成される $n+1$ 個のベクトル ($n=1,2$)

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \in \langle \boldsymbol{u} \rangle \Rightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は 1 次従属.

- $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \in \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \Rightarrow \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ は 1 次従属.

# $n$ 個で生成される $n+1$ 個のベクトル

**補題**

$n$ 個のベクトルの 1 次結合で表される $n+1$ 個のベクトルは 1 次従属. i.e. $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1} \in \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{n+1}$ は 1 次従属

**Q.** 3 個のベクトルの 1 次結合で書ける 4 個のベクトルは 1 次従属であることを証明せよ.

# 基底に含まれるベクトルの数

**命題**

ベクトル空間 $V$ の基底となるベクトルの数は一定

i.e. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ と $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ : $V$ の基底 $\Rightarrow m = n$

(証明) まず, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in \langle \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n \rangle$ である.

$m > n$ とすると, 「補題」より, $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次従属となり, 基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立であることに反する. $\therefore m \leqq n$

同様に $m < n \Rightarrow$ 矛盾 $\therefore n \leqq m$

$$\therefore m = n$$

# 次元の定義

**定義**

基底となるベクトルの組の個数は一定で，その個数を次元という．ベクトル空間の次元を $\dim V$ で表す．

次回: 「生成される部分空間の基底」