線形代数 II 1-07
「基底と次元の定義と意味」

吉冨 賢太郎

2015,2016

部分空間を生成するベクトル

空間 $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$= \left\{ \begin{pmatrix} s+u \\ t+u \\ 0 \end{pmatrix} \middle| s, t, u \in \mathbb{R} \right\}$ 平面 $z = 0$ i.e. xy 平面

u は必要？ $\longrightarrow$ 不要　何故か？

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は不要 $\longrightarrow$ 「1 次独立性」の概念.

生成するベクトル ‘たち’ が 1 次従属

$\longleftrightarrow$ <u>どれかのベクトル (たち)</u>は他の 1 次結合で書ける

$\longrightarrow$ そのベクトル (たち) は不要 (のぞける)

「生成するベクトル (たち) の最適化 (極小化)」ができる

「極小な生成するベクトルたち」は 1 次独立 $=$ 「基底」!!

・「基底」であるベクトル (たち) による 1 次結合の書き方は一意的

・「基底」を構成するベクトルの数は実は一意的 ($=$ 次元)

基底と次元のイメージ

平面 $W : x + y + z = 0$

→ パラメータ表示 $z = t, y = s, x = -s - t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

主張 1. W は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される

主張 2. W のベクトルの (*) の形の表記は一意的

$\longrightarrow$ s, t 2 つのパラメータで W は “座標付け” できる

$\longrightarrow$ 2 次元のイメージ

基底の定義

定義

ベクトル空間 V のベクトルの系 (= 順序を考慮した組)
$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が V の基底

$\Longleftrightarrow$

1. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$
2. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立

$\Longleftrightarrow$

任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し, 係数(スカラー)
$c_1, c_2, \ldots, c_m$ が一意的に定まって,

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$$

と書ける.

問 1. 同値性を証明せよ.

次元の定義と例

V ベクトル空間 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ 基底

$$\to d = \dim V \ : \ V \text{ の次元}$$

(例) $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \dim \mathbb{R}^3 = 3$

(例) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\}$

$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ は基底 $\to \dim W = 2$

問 2. 基底を構成するベクトルの個数は一定か?

次回: 「'次元' の一意性」