線形代数 5-3-01
「基底の定義と意味」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

生成する 1 次独立なベクトルの組

空間 $\mathbb{R}^3 \supset W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ ($z = 0$, ie. xy 平面)

- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ で生成される: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は 1 次独立: $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y = 0$

1 次独立性 $\Leftrightarrow$ 1 次結合の書き方は一意的

$\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と <u>一意的</u> に <u>1 次結合で表せる</u>.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ は } W \text{ の基底}$$

基底と次元のイメージ

平面 $W: x+y+z=0 \to$ パラメータ表示 $z=t, y=s, x=-s-t$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdots (*)$$

主張 1. W は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される

主張 2. W のベクトルの $(*)$ の形の表記は一意的

… s, t 2 つのパラメータで W は基底によって “座標付け” される.

基底の定義

定義

ベクトル空間 V のベクトルの系 (= 順序を考慮した組)

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が V の基底

$\iff$

1. $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle$
2. $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ は 1 次独立

$\iff$ 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対し，係数 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ が 一意的に 定まり，$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$ と書ける.

次元の定義と例

V ベクトル空間 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ 基底

$$\to d = \dim V \ : \ V \text{ の次元}$$

(例) $\mathbb{R}^3 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \to \dim \mathbb{R}^3 = 3$

(例) $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| x + y + z = 0 \right\}$

$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$ は基底 $\to \dim W = 2$

問 2. 基底を構成するベクトルの個数は一定か?

次回: 「'次元' の一意性」