線形代数 5.2.03
「多項式空間における 1 次独立性」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

多項式の 1 次独立性 (基本的な例と例題)

(例) $P_3(\mathbb{R})$ のベクトル $1, x, x^2$ は 1 次独立

$\because\ a + bx + cx^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$

(例) $P_2(\mathbb{R})$ のベクトル $1, x, 1 + x$ は 1 次従属.

$$\because\ 1 + x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x$$

(例) $P_4(\mathbb{R})$ において

$$1 + x, x^2, x^3, 2 + 2x + 3x^2 + 4x^3$$

は 1 次従属

$\because\quad 2(1 + x) + 3 \cdot x^2 + 4 \cdot x^3 + (-1)(2 + 2x + 3x^2 + 4x^3) = 0$

多項式の 1 次独立性

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル $1+2x, 1+3x, x-x^2, 1+x+x^3$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

$a(1+2x)+b(1+3x)+c(x-x^2)+d(1+x+x^3)=0$ とおく．$1, x, x^2, x^3$ の係数を比較して

$$a+b+d=0,\ 2a+3b+c+d=0,\ -c=0,\ d=0$$

これから，$a+b=0, 2a+3b=0 \qquad \therefore a=b=c=d=0$

よって，1 次独立．

多項式の 1 次独立性 (1)

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル $1+x$, $-1+x^2$, $2+x^3$, $3+x^4$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

多項式の 1 次独立性 (2)

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル $1+x^3$, $x-x^2$, $3-2x+2x^2+3x^3$, $1+x^5$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

多項式の 1 次独立性 (3)

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル 1, $1+x$, $1+x+x^2$, $1+x+x^3$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

多項式の 1 次独立性 (4)

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル $1 + x$, $x + x^2$, $1 - x^2$, $x^2 - x^3$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

多項式の 1 次独立性 (5)

Q. $P_5(\mathbb{R})$ のベクトル $2x - x^2$, $x^2 + x^3$, $1 + x + x^4$, の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属ならば，自明でない関係式を与える係数の組を 1 つ答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

次回: 「基底と次元」