線形代数 5-2-02
「数ベクトル空間における 1 次独立性」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

1 次独立性の定義の復習

V ベクトル空間 $/\mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$

定義（1 次独立性）

・$\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \Rightarrow$ 係数 $(c_1, c_2, \ldots, c_m) = (0, 0, \ldots, 0)$

「どのベクトルも他のベクトルの 1 次結合では書けない」と同値

例 ・$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ は 1 次独立. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ は 1 次従属

・$1, x, x^2$ は 1 次独立, $1, x, 1+x$ は 1 次従属

1 次従属の基本的な例

(例) $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ を含むベクトルの系は 1 次従属

(1)

(例) $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ は 1 次従属

(2)

(例) 1 次従属なベクトルの組 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \ldots$ にどんなベクトルを合わせても 1 次従属

(3)

数ベクトル空間における 1 次独立性の判定

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, u $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ.

(解) $s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

よって, 1 次関係式 (1 次結合 $= \mathbf{0}$) の等式

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つから 1 次 $\boxed{(4) \qquad\qquad}$

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (1)

Q. $\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ． 1 次従属な場合は自明でない関係式を与える係数を 1 組答えよ.

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう.

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (2)

Q. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属な場合は自明でない関係式を与える係数を 1 組答えよ.

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう.

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (3)

Q. $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ．1 次従属な場合は自明でない関係式を与える係数を 1 組答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (4)

Q. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ.
1 次従属な場合は自明でない関係式を与える係数を 1 組答えよ.

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう.

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (5)

Q. $\mathbb{R}^4$ のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ の 1 次独立性を判定せよ． 1 次従属な場合は自明でない関係式を与える係数を 1 組答えよ．

この問題は自分でやってから解説を聞くようにしましょう．

数ベクトルにおける 1 次独立性の判定 (まとめ)

まとめ: $\mathbb{R}^m$ のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立になるのは
$A = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_m)$ とおくとき,

方程式 (5) の解が (6) のときである.

これを, A の (7) を使って言いかえると

(8)

となるときである.