線形代数 5.2.01
「1 次独立性」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

生成する部分空間を生成するベクトル

・$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ は $\mathbb{R}^2$ 全体である.

$\mathbb{R}^2$ のベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける $\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は不要

つまり, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

・$P_2(\mathbb{R})$ の部分空間 $U = \langle x, x^2, x + x^2 \rangle$

U は $P_2(\mathbb{R})$ の中で定数項のないもの全体からなる部分空間

$\rightsquigarrow$ $U = \langle x, x^2 \rangle$ で $x + x^2$ は不要.

生成するのに不要なベクトル

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \mathbb{R}^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle
$$

Q. 生成するベクトルで無駄ものは結局何か?

(1)

(この時点で自分の考えを書いてみよう．正解である必要はない)

検証

ポイント

$U = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, $\boldsymbol{w} \in U \rightsquigarrow U = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle \Rightarrow \boldsymbol{w}$ は不要.

$U = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$, $\boldsymbol{w} \notin U \rightsquigarrow U \subsetneqq W = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle$

$\Rightarrow$ <u>不要なものは削りたい</u> $\rightsquigarrow$

不要なもの $\fallingdotseq$ 他のベクトルの 1 次結合ですでに書けるもの

$\Rightarrow$ 「1 次従属」の概念

1 次従属の例

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(2)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \boxed{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{(4)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \boxed{(5)} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \boxed{(6)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{(7)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

「3 つのベクトルのうち，どれか 1 つが他の 2 つのベクトルで書ける」

注　「すべてのベクトルが他のベクトルの 1 次結合で表わせる」ではない．
「どれか 1 つでも他のベクトルの 1 次結合で表わせる」である．

1 次従属・1 次独立の定義

・V ベクトル空間 $/\mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次従属

$\Leftrightarrow$ ある係数 $(c_1, c_2, \ldots, c_m) \neq$ (8) が存在して,

(9)

となること.

☆ 1 次従属でないことを 1 次独立という. i.e.

・V ベクトル空間 $/\mathbb{K}$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立

$\Leftrightarrow$ (10)

となること.

1 次独立性の同値条件

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ が 1 次独立

$\Leftrightarrow$ $a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_m\boldsymbol{v}_m = b_1\boldsymbol{v}_1 + b_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + b_m\boldsymbol{v}_m$

ならば $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, ..., $a_m = b_m$

簡単のため，3 つのベクトルで示す． $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ が 1 次独立，
$a\boldsymbol{x} + b\boldsymbol{y} + c\boldsymbol{z} = a'\boldsymbol{x} + b'\boldsymbol{y} + c'\boldsymbol{z}$ と仮定

$$\therefore \quad a = a', b = b', c = c'$$