線形代数 5.1.01
「ベクトル空間の定義」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

数ベクトル空間でできること

数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$

$\cdots$ n次数ベクトル全体の集合に自然な和やスカラー倍を定義したもの

i.e. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$に対して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $c\boldsymbol{v}$ が計算できて,

$$4(3\boldsymbol{u}) + 1\boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ 2(3\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v}) = 6\boldsymbol{u} + 8\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \mathbf{0},\ \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v},\ \text{...etc.}$$

類似の計算ができる‘集合’は他にも...

数ベクトル空間の"類似物"

例. xの多項式全体の集合

$$f(x) + g(x),\ cf(x)$$

例. 関数全体の集合 $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$f + g : x \mapsto$ (1) , $cf : x \mapsto$ (2)

例. 実数数列全体の集合 $\{\{a_n | a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}\}$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},\ 3\{a_n\} = \{3a_n\}$$

$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots,\} + \{2, 5, 8, 11, 14, \ldots,\} =$ (3)

$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots,\} + \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots,\} =$ (4)

$$\vdots$$

$\rightsquigarrow$ 共通の性質を考えたい

ベクトル空間の正式な定義

$\mathbb{K}(=\mathbb{R}$または$\mathbb{C}$, 体), Vが$\mathbb{K}$上のベクトル空間であるとは:

$V \neq \emptyset$で各(任意の)$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$と各$c \in \mathbb{K}$に対し

和 (5) ［　　　　］ , スカラー倍 (6) ［　　　　］

が定まっていて,

次の性質を満たすもの：任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対し,

結合法則: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, (7) ［　　　　］

分配法則: (8) ［　　　　］ $(c+d)\boldsymbol{x} = c\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$

$\mathbf{0}$の存在, 可換性: $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

1倍の性質, 逆元(逆ベクトル)の存在:

$1\boldsymbol{x} =$ (9) ［　　］, $\boldsymbol{x}$に対し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$となる$\boldsymbol{y}$が存在($-\boldsymbol{x}$と書く)

次回

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \to$ 実ベクトル空間,　　$\mathbb{K} = \mathbb{C} \to$ 複素ベクトル空間

ベクトル空間の要素(元) $=$ $\boxed{(10)\quad\quad\quad\quad}$

$\mathbb{K}$ の要素 $=$ スカラー

次回: 「ベクトル空間の例」

線形代数 5.1.02
「ベクトル空間の例」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています．
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります．

さまざまなベクトル空間

- $\mathbb{R}^n$ ... $\mathbb{R}^2$ や $\mathbb{R}^3$ は平面・空間のベクトル全体と思える
- $M(n, m; \mathbb{R})$ ... 実数を成分とする $n \times m$ 行列の全体
- $\mathbb{R}[x]$ ... 多項式全体：通常の和とスカラー倍 (多項式の積は忘れる)
- $A(\mathbb{R})$ ... (実)数列全体
- $F(S, \mathbb{R})$ ... 集合S上の実数値関数全体：

和　$f + g : S \ni x \mapsto \boxed{(1)\qquad\qquad} \in \mathbb{R}$

スカラー倍　$cf : S \ni x \mapsto \boxed{(2)\qquad\qquad} \in \mathbb{R}$

$\vdots$

Q. 他にもどんな集合がベクトル空間になるか考えてみよう

特殊な例

Q. 正の実数全体$\mathbb{R}^+$の要素 x, y, $c \in \mathbb{R}$ に対し
和$x + y$を xy(積), スカラー倍 cxを x^c(べき乗)
で定義するとベクトル空間になる. 確かめてみよう.

(3)

この問題は指定の解答用紙に記載して下さい.

部分集合がベクトル空間になる例

ベクトル空間の部分集合が同じ演算でベクトル空間となる例

1. 平面上の直線 $L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, x + 2y = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2$

2. 2次以下の多項式全体の集合 $P_2(\mathbb{R}) \subset P(\mathbb{R})$

$f(x), g(x)$が2次以下 $\Rightarrow$ $f(x) + g(x)$ も $cf(x)$も2次以下

ただし, 丁度2次の多項式全体ではうまく行かない.

うまく行かない例:

(4)

注 全体で「8つの法則」は成り立っていれば, 部分集合でも成り立つ

次回「部分空間」

線形代数 5.1.03
「部分空間の定義」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

部分集合がベクトル空間になる場合・ならない場合

Q. 次の各部分集合はベクトル空間になるか?

1. 空間$\mathbb{R}^3$における平面 $2x - y - z = 0$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(1)

2. 空間$\mathbb{R}^3$における平面 $2x - y - z = 1$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(2)

3. $\mathbb{R}$の部分集合 $\mathbb{Z}$や $\mathbb{Q}$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(3)

部分集合がベクトル空間になる場合・ならない場合

4. $P(\mathbb{R}) \supset P_2(\mathbb{R}) = \{f(x) | \deg f \leqq 2\}$ ($\deg f$ は f の次数)

… ベクトル空間に$\{$なる・ならない$\}$

理由

(4)

5. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) | f(0) = 1\}$

… ベクトル空間に$\{$なる・ならない$\}$

理由

(5)

6. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) | f(0) = 0\}$

… ベクトル空間に$\{$なる・ならない$\}$

理由

(6)

部分空間の定義

★ベクトル空間の定義の8つの条件は部分集合においても成り立つ.

$\Rightarrow$ ベクトル空間の部分集合($\neq \emptyset$)が 同じ演算について

ベクトル空間になるための条件

$=$ 「和とスカラー倍が部分集合の中でできる」

$=$ 「和とスカラー倍について閉じている」

定義

$\mathbb{K}$上のベクトル空間 V の部分集合 W がVの部分空間であるとは

$W \neq \emptyset$ であり, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$と 任意の スカラー$c \in \mathbb{K}$に対し

(7)

となること.

まとめ

- ベクトル空間の空でない部分集合は和とスカラー倍について閉じているとき部分空間と言われる.
- 部分空間である典型例として, 平面における原点を通る直線や空間における原点を通る平面, 定数項が0の多項式全体
- 部分空間でない典型例として, 平面における原点を通らない直線や空間における原点を通らない平面, 定数項が$1(\neq 0)$の多項式全体などがあげられる.

次回は「連立1次方程式の解空間」

線形代数 5.1.04
「連立1次方程式の解空間」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています．

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります．

部分空間としての平面

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, 2x + 3y + 5z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$A = (2 \;\; 3 \;\; 5)$ とおく $\Rightarrow U = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \, \boxed{(1) \qquad\qquad} \right\}$ とかける.

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \Rightarrow A\boldsymbol{u} = A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \Rightarrow A\boldsymbol{w} = \boxed{(2) \qquad\qquad} = \boldsymbol{0} \therefore \; \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$

同様に $\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{u}$ とすると, $\boxed{(3) \qquad\qquad}$ $\therefore \; c\,\boldsymbol{u} \in U$

i.e. 平面Uは1つの<u>斉次</u>1次方程式の解からなる集合

$\Rightarrow$「斉次連立1次方程式の解全体からなる集合」も部分空間

斉次連立1次方程式の解空間

U : $n \times m$ 行列 A を係数行列とする斉次連立1次方程式の解全体の集合

i.e. $U = \left\{ \boldsymbol{x} \in \boxed{(4)} \,\middle|\, \boxed{(5)} \right\}$ は部分空間.

(証明) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U$, $\boldsymbol{c} \in \mathbb{K}$ とする(勝手な要素).

$$A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

示すこと: ① $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ ② $c\boldsymbol{x} \in U$

① : $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in U$ を示すには (6) を示せばよい.

(7)

② を示す. 同じく (8) を示せばよい.

(9)

線形代数 5.1.05
「1 次結合と生成する部分空間」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

1 次結合の例

和とスカラー倍を用いてできること:

2 次数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \text{2 次数ベクトル } 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{(1)\qquad}$$

2 次以下の多項式の空間のベクトル (多項式) $1, x, x^2$

$$\rightsquigarrow \text{2 次以下の多項式 } 3 \cdot 1 + 4 \cdot x - 2x^2 = 3 - 4x - 2x^2$$

2 次以下の多項式の空間のベクトル (多項式) $1, 1+x, (1+x)^2$

$a + bx + cx^2$

$$= \boxed{(2)\qquad} \cdot 1 + \boxed{(3)\qquad}(1+x) + \boxed{(4)\qquad}(1+x)^2$$

1 次結合の定義 (3 つのベクトルの場合)

一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の例えば

3 つの要素 (ベクトル) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ および 3 つのスカラー $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$

$$\rightsquigarrow \underline{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3} \in V \text{ が定まる.}$$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の「1 次結合」, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$(または (c_1, c_2, c_3)):係数

1 次結合の定義

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V

k 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$

k 個のスカラー $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$

$$\rightsquigarrow\ c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k = \boxed{(5)\qquad\qquad}$$ ($\sum$ 記号で)

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ の 1 次結合

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$ （この 1 次結合の） 係数

1 次結合の例 (数ベクトル空間)

$$V = \mathbb{K}^3,\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ を係数とする 1 次結合

$$= a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

行列で書くと

$$= \boxed{(6)\qquad\qquad} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1 次結合と係数ベクトル

$V = P_5(\mathbb{K}),\ \boldsymbol{v}_1 = 1, \boldsymbol{v}_2 = x, \boldsymbol{v}_3 = x^2$

$a, b, c \in \mathbb{K} \qquad \to a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = \boxed{(7)\qquad\qquad}$

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が数ベクトルの場合の等式

$$(\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$$

の自然な拡張として，「形式的な」行ベクトル $(1\ \ x\ \ x^2)$ を用いた表記

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$$

を用いると「座標」「表現行列」「基底変換」において考えやすくなる．

注 通常の多項式同様，bx や cx^2 を xb や x^2c とは書かないことに注意

1 次結合全体 (係数を動かす)

$\mathbb{R}^3$ の部分空間は $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ 以外では

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}, \dots$$

i.e. $\{t\boldsymbol{v} | t \in \mathbb{R}\}$ や $\{s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} | s, t \in \mathbb{R}\}$ の形

i.e.「係数を動かしたときの 1 次結合全体」は部分空間

$\boldsymbol{u}$ を含む部分空間は (8) を含む

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を含む部分空間は (9) を含む

$\Rightarrow$ (10) は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を含む <u>最小</u> の部分空間

生成される部分空間の定義

$v_1, v_2, \ldots, v_m \in V$

$$U = \langle v_1, v_2, \ldots, v_m \rangle = \boxed{(11)\qquad\qquad\qquad}$$

を $v_1, v_2, \ldots, v_m$ で 生成される 部分空間という.

U は $v_1, v_2, \ldots, v_m$ を含む最小の V の部分空間.

注 最小：$A \subset B$ を A は B より「小さい」と定めるときこれ以上「小さく」できないということ

Q. U は部分空間になっていることを示せ

Q. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_2(\mathbb{R}) | f(0) = 0\}$ を生成するベクトルを見つけよう.

線形代数 5.1.06
「部分空間の判定」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程線形代数基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.
スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

部分空間の判定 (1)

Q. 次の各部分集合は部分ベクトル空間になるか?

1. $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| y = x^2 \right\}$

2. $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| xy \geqq 0 \right\}$

部分空間の判定 (2)

3. $P_3(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_3(\mathbb{R}) | f(1) = f'(1) = 0\}$

4. $P_3(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_3(\mathbb{R}) | f(0) = 0, f'(0) = 1\}$

部分空間の判定 (3)

Q. 実数数列全体 $A(\mathbb{R})$の次の部分集合は部分空間か?

5. 階差1の等差数列全体

6. 公比 2の等比数列全体

部分空間の判定 (4)

7. 等差数列全体 $(a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n)$

部分空間になる・ならないの証明

・ならない場合

$$\mathbb{R}^3 \supset H_1 : 2x + 3y + z = 1,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_1$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H_1$$

$$\because 2 \times (-1) + 3 \times 1 + 1 = 2 \neq 1$$

部分空間にならない「反証」が与えられた

和かスカラー倍の一方でも満たさない具体的な例をあげれば十分.

Q. 何故か?

部分空間になる・ならないの証明

・なる場合

$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in H_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in H_2 \text{ ... OK.}$$

$\because 2 \times (-1) + 3 \times (-1) + 1 \times 5 = 0$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in H_2 \text{ ... OK.}$$

$\because 2 \times (-3) + 3 \times 0 + 1 \times 6 = 0$

これで証明になるか? $\rightsquigarrow$ $\boxed{(1)\quad}$

部分空間になる場合(証明)

$$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrrrcl} & 2x_1 & +3y_1 & +z_1 & = & 0 \\ +) & 2x_2 & +3y_2 & +z_2 & = & 0 \\ \hline & 2x_3 & +3y_3 & +z_3 & = & {\color{red}0} \end{array}$$

部分空間になる場合(証明)

$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$

$$\underset{\boldsymbol{w}_1}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}} + \underset{\boldsymbol{w}_2}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rrrrcl} & 2x_1 & +3y_1 & +z_1 & = & 0 \\ +) & 2x_2 & +3y_2 & +z_2 & = & 0 \\ \hline & 2x_3 & +3y_3 & +z_3 & = & {\color{red}0} \end{array}$$

i.e. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in H_2 \Rightarrow \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in H_2$

Q. スカラー倍の場合を証明してみよう

(3)

部分空間の判定 (問題集)

8. 漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を満たす数列全体

(4)

9. 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列全体

(5)

$[0,1]$区間上の関数全体の部分集合を考える.

10. $[0,1]$区間上の連続関数全体

(6)

11. $f(0) = f(1)$を満たす関数全体

(7)

12. 至るところ不連続な関数全体

(8)

13. $[0,1]$区間上の有界関数全体

(9)

14. $(0,1)$で微分可能で, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$となる関数全体

(10)