線形代数 5.1.06
「1 次結合と生成する部分空間」

吉冨 賢太郎

2017

1 次結合の例

和とスカラー倍を用いると:

2 次数ベクトル $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ 2 次数ベクトル $3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$

2 次以下の多項式の空間のベクトル (多項式) $1, x, x^2$

$\rightsquigarrow$ 2 次以下の多項式 $3 \cdot 1 + 4 \cdot x - 2x^2 = 3 - 4x - 2x^2$

一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の例えば

3 つの要素 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ および 3 つのスカラー $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$

$\rightsquigarrow$ $\underline{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3} \in V$ が定まる.

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の「1 次結合」, $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$(または (c_1, c_2, c_3)):係数

1 次結合の定義

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V

k 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$

k 個のスカラー $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$

$\rightsquigarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$: $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ の 1 次結合

$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$ (または $c_1, c_2, \ldots, c_k$):係数

注 便宜上 $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} c_i\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$ を $(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \ldots\ \boldsymbol{v}_k)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$

と書くと，$V = \mathbb{K}^n$ のときは行列と数ベクトルの積と同じ.
(つまり，$\mathbb{K}^n$ から一般の V への拡張としてこの記法だけ認める)

1 次結合の例 ($V = \mathbb{K}^n$)

$$V = \mathbb{K}^3,\ \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 3, c_2 = 4, c_3 = 5$

$$\to 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left(= \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right)$$

$x, y, z \in \mathbb{K}$

$$\to \underline{x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \left(= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$\|$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2 \ \ \boldsymbol{v}_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1 次結合の例 ($V = P_n(\mathbb{K})$ の場合)

$V = P_5(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{v}_1 = 1, \boldsymbol{v}_2 = x, \boldsymbol{v}_3 = x^2$

$c_1 = 3, c_2 = -2, c_3 = 4$

$$\to 3 \cdot 1 + (-2)x + 4x^2 \ (= 3 - 2x + 4x^2)$$

$a, b, c \in \mathbb{K}$

$$\to a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 \ (= a + bx + cx^2)$$

便宜上，「形式的な」行ベクトル $(1 \ x \ x^2)$ を考えて

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$$

と書くことにしておくと，後で見通しがよくなる.

注 通常の多項式同様，bx や cx^2 を xb や x^2c とは書かないことに注意

生成される部分空間の例

数ベクトル空間の部分空間の例を思い出そう．

$\mathbb{R}^3$ の部分空間は $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ 以外では

- (直線) $\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$, $\ldots$
- (平面) $\left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$, $\ldots$

のように，$\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \ldots$ に対し

$$\{t\,\boldsymbol{v} | t \in \mathbb{R}\} \text{ や } \{s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v} | s, t \in \mathbb{R}\}$$

の形．

部分空間の作り方 その 1 「1 次結合全体を集める」

$s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}$ の形のベクトル同士の和も，スカラー倍も

$s\,\boldsymbol{u} + t\,\boldsymbol{v}$ の形 $\rightsquigarrow$ 確かに部分空間

生成される部分空間の定義

一般に

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$ を含む最小の V の部分空間 U

$= \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で <u>生成される</u> 部分空間

$$
\begin{aligned}
U &= \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle \\
&= \left\{ \sum_{i=1}^{m} c_i \boldsymbol{v}_i \;\middle|\; c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{K} \right\}
\end{aligned}
$$

注 最小とは, $A \subset B$ のとき A は B より小さいと考えた表現

Q. U 自身が部分空間になっていることを示せ

生成される部分空間 (例)

$P_4(\mathbb{R})$ のベクトル x, x^2, x^3 で生成される部分空間 $U = \langle x, x^2, x^3 \rangle$

$$U = \{ax + bx^2 + cx^3 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

3 次以下で定数項がない多項式全体

$$(2x + 3x^2 + x^3) + (-x + 2x^2 - x^3) = x + 5x^2 + 0x^3 \in U$$

$$3(x + 2x^2 + x^3) = 3x + 6x^2 + 3x^3 \in U$$

注　上はあくまでも和やスカラー倍について閉じている例をあげたに過ぎない (証明ではない).

無駄なベクトルを含む例

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ は $\mathbb{R}^2$ 全体である.

$\mathbb{R}^2$ のどんなベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ も $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と書ける

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ は不要

つまり, $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

同様に, $\underline{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}$

Q. 下線部の主張を確かめてみよう