線形代数 5.1.06
「部分空間の判定」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

部分空間の判定（1）

Q. 次の各部分集合は部分ベクトル空間になるか?

1. $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, y = x^2 \right\}$

(1)

2. $\mathbb{R}^2 \supset W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \, xy \geqq 0 \right\}$

(2)

部分空間の判定（2）

Q. 次の各部分集合は部分ベクトル空間になるか?

3. $P_3(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_3(\mathbb{R}) | f(1) = f'(1) = 0\}$

(3)

4. $P_3(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_3(\mathbb{R}) | f(0) = 0, f'(0) = 1\}$

(4)

部分空間の判定（3）

Q. 実数数列全体 $A(\mathbb{R})$ の次の部分集合は部分空間か?

5. 階差 1 の等差数列全体

(5)

6. 公比 2 の等比数列全体

(6)

部分空間の判定（4）

7. 等差数列全体（$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$）

(7)

部分空間になる・ならないの証明

・ならない場合

$$\mathbb{R}^3 \supset H_1 : 2x + 3y + z = 1,\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in H_1$$

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin H_1$$

$$\because\ 2 \times (-1) + 3 \times 1 + 1 = 2 \neq 1$$

部分空間にならない「反証」が与えられた

和かスカラー倍の一方でも満たさない具体的な例をあげれば十分.

Q. 何故か?

(8)

部分空間になる・ならないの証明

・なる場合

$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in H_2 \Rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \in H_2 \ \ldots \ \text{OK.}$$

$\because 2 \times (-1) + 3 \times (-1) + 1 \times 5 = 0$

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in H_2 \ \ldots \ \text{OK.}$$

$\because 2 \times (-3) + 3 \times 0 + 1 \times 6 = 0$

これで証明になるか? $\rightsquigarrow$ $\boxed{(9) \qquad\qquad}$

部分空間になる場合 (証明)

$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rl} & 2x_1 + 3y_1 + z_1 = 0 \\ +) & 2x_2 + 3y_2 + z_2 = 0 \\ \hline & 2x_3 + 3y_3 + z_3 = {\color{red}0} \end{array}$$

部分空間になる場合 (証明)

$\mathbb{R}^3 \supset H_2 : 2x + 3y + z = 0$

$$\underset{\boldsymbol{w}_1}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}}} + \underset{\boldsymbol{w}_2}{\underset{\parallel}{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rl} & 2x_1 + 3y_1 + z_1 = 0 \\ +) & 2x_2 + 3y_2 + z_2 = 0 \\ \hline & 2x_3 + 3y_3 + z_3 = 0 \end{array}$$

i.e. $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in H_2 \Rightarrow \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in H_2$

Q. スカラー倍の場合を証明してみよう

(11)

部分空間の判定（問題集）

8. 漸化式 $a_{n+1} = 2a_n + 1$ を満たす数列全体 (12)

9. 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ を満たす数列全体 (13)

[0, 1] 区間上の関数全体の部分集合を考える.

10. [0, 1] 区間上の連続関数全体 (14)

11. $f(0) = f(1)$ を満たす関数全体 (15)

12. 至るところ不連続な関数全体 (16)

13. [0, 1] 区間上の有界関数全体 (17)

14. $(0, 1)$ で微分可能で，$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$ となる関数全体 (18)