線形代数 5.1.05
「1 次結合と生成する部分空間」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

1 次結合の例

和とスカラー倍を用いてできること:

2 次数ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow \text{2 次数ベクトル } 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boxed{(1)\qquad}$$

2 次以下の多項式の空間のベクトル (多項式) $1, x, x^2$

$$\rightsquigarrow \text{2 次以下の多項式 } 3 \cdot 1 + 4 \cdot x - 2x^2 = 3 - 4x - 2x^2$$

2 次以下の多項式の空間のベクトル (多項式) $1, 1+x, (1+x)^2$

$$a + bx + cx^2$$
$$= \boxed{(2)\qquad} \cdot 1 + \boxed{(3)\qquad}(1+x) + \boxed{(4)\qquad}(1+x)^2$$

1 次結合の定義 (3 つのベクトルの場合)

一般に $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の例えば

3 つの要素 (ベクトル) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ および 3 つのスカラー $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{K}$

$$\rightsquigarrow \underline{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3} \in V \text{ が定まる.}$$

$\uparrow$

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ の「1 次結合」, $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$(または (c_1, c_2, c_3)):係数

1 次結合の定義

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V

k 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$

k 個のスカラー $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{K}$

$$\rightsquigarrow \underbrace{c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k}_{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_k \text{ の 1 次結合}} = \boxed{(5) \qquad\qquad}$$

($\sum$ 記号で)

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$$

（この 1 次結合の） 係数

1 次結合の例 (数ベクトル空間)

$$V = \mathbb{K}^3,\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\ \boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^3$ を係数とする 1 次結合

$$= a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

行列で書くと

$$= \boxed{(6)\qquad\qquad} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w})\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

1 次結合と係数ベクトル

$V = P_5(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{v}_1 = 1, \boldsymbol{v}_2 = x, \boldsymbol{v}_3 = x^2$

$a, b, c \in \mathbb{K}$ $\quad \to a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = \boxed{(7) \quad\quad}$

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ が数ベクトルの場合の等式

$$(\boldsymbol{u}\ \ \boldsymbol{v}\ \ \boldsymbol{w}) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$$

の自然な拡張として，「形式的な」行ベクトル $(1\ \ x\ \ x^2)$ を用いた表記

$$\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a + bx + cx^2$$

を用いると「座標」「表現行列」「基底変換」において考えやすくなる．

注 通常の多項式同様，bx や cx^2 を xb や x^2c とは書かないことに注意

1 次結合全体 (係数を動かす)

$\mathbb{R}^3$ の部分空間は $\{\mathbf{0}\}$, $\mathbb{R}^3$ 以外では

$$\left\{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}, \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}, \ \ldots$$

i.e. $\{t\boldsymbol{v} | t \in \mathbb{R}\}$ や $\{s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v} | s, t \in \mathbb{R}\}$ の形

i.e.「係数を動かしたときの 1 次結合全体」は部分空間

$\boldsymbol{u}$ を含む部分空間は (8) を含む

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を含む部分空間は (9) を含む

$\Rightarrow$ (10) は $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を含む <u>最小</u> の部分空間

生成される部分空間の定義

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \in V$

$$U = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m \rangle = \boxed{(11)\qquad\qquad\qquad}$$

を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ で 生成される 部分空間という.

U は $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ を含む最小の V の部分空間.

注 最小：$A \subset B$ を A は B より「小さい」と定めるときこれ以上「小さく」できないということ

Q. U は部分空間になっていることを示せ

Q. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) \in P_2(\mathbb{R}) | f(0) = 0\}$ を生成するベクトルを見つけよう.