線形代数 5.1.03
「部分空間の定義」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています.

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります.

部分集合がベクトル空間になる場合・ならない場合

Q. 次の各部分集合はベクトル空間になるか?

1. 空間 $\mathbb{R}^3$ における平面 $2x - y - z = 0$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(1)

2. 空間 $\mathbb{R}^3$ における平面 $2x - y - z = 1$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(2)

3. $\mathbb{R}$ の部分集合 $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{Q}$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(3)

部分集合がベクトル空間になる場合・ならない場合

4. $P(\mathbb{R}) \supset P_2(\mathbb{R}) = \{f(x) | \deg f \leqq 2\}$ ($\deg f$ は f の次数)

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(4)

5. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) | f(0) = 1\}$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(5)

6. $P_2(\mathbb{R}) \supset \{f(x) | f(0) = 0\}$

… ベクトル空間に{なる・ならない}

理由

(6)

部分空間の定義

★ ベクトル空間の定義の 8 つの条件は部分集合においても成り立つ.

$\Rightarrow$ ベクトル空間の部分集合 ($\neq \emptyset$) が **同じ演算** について

ベクトル空間になるための条件

$=$ 「和とスカラー倍が部分集合の中でできる」

$=$ 「和とスカラー倍について 閉じている」

定義

$\mathbb{K}$ 上のベクトル空間 V の部分集合 W が V の部分空間であるとは

$W \neq \emptyset$ であり, 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ と 任意の スカラー $c \in \mathbb{K}$ に対し

(7)

となること.

まとめ

- ベクトル空間の空でない部分集合は和とスカラー倍について閉じているとき部分空間と言われる．
- 部分空間である典型例として，平面における原点を通る直線や空間における原点を通る平面，定数項が 0 の多項式全体
- 部分空間でない典型例として，平面における原点を通らない直線や空間における原点を通らない平面，定数項が $1(\neq 0)$ の多項式全体などがあげられる．

次回は 「連立 1 次方程式の解空間」