線形代数 5.1.01
「抽象ベクトル空間の定義」

吉冨 賢太郎

大阪府立大学

2017

ベクトル空間の導入

数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n,\ \mathbb{C}^n$
$\cdots$ n 次数ベクトル全体の集合に自然な和やスカラー倍を定義したもの

i.e. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対して $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $c\boldsymbol{v}$ が計算できて,

$$4(3\boldsymbol{u}) + 1\boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\ 2(3\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v}) = 6\boldsymbol{u} + 8\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v},\ \ldots\text{etc.}$$

類似の計算ができる '集合' は他にも...

例. 多項式の集合 $f(x) + g(x)$, $cf(x)$

例. 2π を周期に持つ周期関数全体 $\sin 2x + \cos 3x$, $7\cos x$
$h(x) = f(x)+g(x) \Rightarrow$
$h(x+2\pi) = f(x+2\pi)+g(x+2\pi) = f(x)+g(x) = h(x)$

例. 実数数列全体の集合 $\{\{a_n | a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}\}$
$$\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n+b_n\},\ 3\{a_n\}=\{3a_n\}$$

共通の性質を考えたい
$\Rightarrow$ 「足し算やスカラー倍ができる集合」 $=$ 「ベクトル空間」
スカラーを実数で考えるとき : 実ベクトル空間
スカラーを複素数で考えるとき : 複素ベクトル空間

ベクトル空間の正式な定義

$\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, 体) V が $\mathbb{K}$上のベクトル空間であるとは:

$V \neq \emptyset$ で各 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と各 $c \in \mathbb{K}$ に対し

和 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$, スカラー倍 $c\boldsymbol{x}$ が定まっていて,

次の (自然な) 性質を満たすもの ($c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$).

結合法則: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $c(d\boldsymbol{x})=(cd)\boldsymbol{x}$

分配法則: $c(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=c\boldsymbol{x}+c\boldsymbol{y}$, $(c+d)\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$

和の可換性, $\mathbf{0}$ の存在: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}(=\mathbf{0}+\boldsymbol{x})$

1 倍の性質, 逆元 (逆ベクトル) の存在:

$$1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$$

$\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{y}$ が存在 ($-\boldsymbol{x}$ と書く)

$\mathbb{K}=\mathbb{R} \longrightarrow$ 実ベクトル空間,

$\mathbb{K}=\mathbb{C} \longrightarrow$ 複素ベクトル空間

・ベクトル空間の要素 (元) $=$ ベクトル

・$\mathbb{K}$ の要素 $=$ スカラー

次回: 「ベクトル空間の例」