線形代数 5.1.01
「ベクトル空間の定義」

K. Yoshitomi

大阪府立大学

2017

この動画は培風館「理工系新課程 線形代数 基礎から応用まで」[改訂版] に準拠しています．

スライドは http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~yositomi/slide/LA2-2017/ にあります．

数ベクトル空間でできること

数ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n, \ \mathbb{C}^n$

$\cdots$ n 次数ベクトル全体の集合に自然な和やスカラー倍を定義したもの

i.e. $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$, $c \in \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ に対して $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$, $c\boldsymbol{v}$ が計算できて,

$$4(3\boldsymbol{u}) + 1\boldsymbol{v} = 12\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \ 2(3\boldsymbol{u} + 4\boldsymbol{v}) = 6\boldsymbol{u} + 8\boldsymbol{v},$$

$$\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \ \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}, \ \ldots\text{etc.}$$

類似の計算ができる ‘集合’ は他にも...

数ベクトル空間の'' 類似物''

例． x の多項式全体の集合

$$f(x) + g(x),\ cf(x)$$

例． 関数全体の集合 $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

$$f + g : x \mapsto \boxed{(1)\qquad} ,\ cf : x \mapsto \boxed{(2)\qquad}$$

例． 実数数列全体の集合 $\{\{a_n | a_n \in \mathbb{R}\}_{n=1}^{\infty}\}$

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},\ 3\{a_n\} = \{3a_n\}$$

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots,\} + \{2, 5, 8, 11, \ldots,\} = \boxed{(3)\qquad}$$

$$\{1, 3, 5, 7, \ldots,\} + \{2, 4, 8, 16, \ldots,\} = \boxed{(4)\qquad}$$

$$\vdots$$

$\rightsquigarrow$ 共通の性質を考えたい

ベクトル空間の正式な定義

$\mathbb{K}(=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, 体), V が $\mathbb{K}$ 上のベクトル空間であるとは:

$V \neq \emptyset$ で各 (任意の)$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ と各 $c \in \mathbb{K}$ に対し

和 $\boxed{(5)\qquad\qquad}$, スカラー倍 $\boxed{(6)\qquad\qquad}$

が定まっていて,

次の性質を満たすもの : 任意の $c, d \in \mathbb{K}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対し,

結合法則: $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$, $\boxed{(7)\qquad\qquad}$

分配法則: $\boxed{(8)\qquad\qquad}$ $(c+d)\boldsymbol{x}=c\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$

$\mathbf{0}$ の存在, 可換性: $\boldsymbol{x}+\mathbf{0}=\boldsymbol{x}=\mathbf{0}+\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

1 倍の性質, 逆元 (逆ベクトル) の存在:

$1\boldsymbol{x}=\boxed{(9)\quad}$, $\boldsymbol{x}$ に対し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ となる $\boldsymbol{y}$ が存在 ($-\boldsymbol{x}$ と書く)

ベクトルとは

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \longrightarrow$ 実ベクトル空間,　　$\mathbb{K} = \mathbb{C} \longrightarrow$ 複素ベクトル空間

ベクトル空間の要素 (元) $=$ $\boxed{\text{(10)}\qquad\qquad}$

$\mathbb{K}$ の要素 $=$ スカラー

次回: 「ベクトル空間の例」