線形代数 I
「行列式の応用」

吉冨 賢太郎

June 30, 2017

正則性と行列式

A n 次正方行列

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$, $AB = E_n$

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow B = A^{-1},\ AB = E_n$

両辺の行列式をとると $|A||B| = |E| = 1$

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow B = A^{-1},\ AB = E_n$

両辺の行列式をとると $|A||B| = |E| = 1$

$\therefore\ |A| \neq 0$

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$, $AB = E_n$

両辺の行列式をとると $|A||B| = |E| = 1$

$\therefore$ $|A| \neq 0$

逆に，$|A| \neq 0$ とする． X : A の余因子行列 $\Rightarrow$ $AX = |A|E_n$

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$, $AB = E_n$

両辺の行列式をとると $|A||B| = |E| = 1$

$\therefore$ $|A| \neq 0$

逆に, $|A| \neq 0$ とする. X : A の余因子行列 $\Rightarrow$ $AX = |A|E_n$

$\therefore$ $|A| \neq 0$ ならば $\dfrac{1}{|A|}X$ が A の逆行列 A^{-1} である.

正則性と行列式

A n 次正方行列

A 正則 $\Leftrightarrow$ $|A| \neq 0$

$\because$ A が正則 $\Rightarrow$ $B = A^{-1}$, $AB = E_n$

両辺の行列式をとると $|A||B| = |E| = 1$

$\therefore$ $|A| \neq 0$

逆に，$|A| \neq 0$ とする．X : A の余因子行列 $\Rightarrow$ $AX = |A|E_n$

$\therefore$ $|A| \neq 0$ ならば $\dfrac{1}{|A|}X$ が A の逆行列 A^{-1} である．

すなわち，A 正則

線形性とブロック分け 例２

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix}3&3&5\\2&7&4\\5&4&3\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}3&3&5\\1&0&0\\5&4&3\end{vmatrix}+7\begin{vmatrix}3&3&5\\0&1&0\\5&4&3\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}3&3&5\\0&0&1\\5&4&3\end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix}1&0&0\\3&3&5\\5&4&3\end{vmatrix} +(-1)\cdot 7\begin{vmatrix}0&1&0\\3&3&5\\5&4&3\end{vmatrix} +(-1)\cdot 4\begin{vmatrix}0&0&1\\3&3&5\\5&4&3\end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix}1&0&0\\3&3&5\\5&4&3\end{vmatrix} +(-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix}1&0&0\\3&3&5\\4&5&3\end{vmatrix} +(-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix}1&0&0\\5&3&3\\3&5&4\end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2\begin{vmatrix}3&5\\4&3\end{vmatrix}+(-1)^2 7\begin{vmatrix}3&5\\5&3\end{vmatrix}+(-1)^3 4\begin{vmatrix}3&3\\5&4\end{vmatrix}$$

i.e.

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e.

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e.

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e. $|A| = -a_{21}|A_{21}| + a_{22}|A_{21}| - a_{23}|A_{23}|$

列・行に関する展開

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列
A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列
A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列
A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}}$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}}$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$

$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \text{ : 第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij$$: 第 j 列に関する余因子展開

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

列・行に関する展開

$A=(a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n=3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \quad \text{: 第 } j \text{ 列に関する余因子展開}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \quad \text{: 第 } i \text{ 行に関する余因子展開}
\end{aligned}
$$

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$ ： n 次正方行列
A_{ij} ： A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \ : \ A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij$$ ： 第 j 列に関する余因子展開

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta ij$$ ： 第 i 行に関する余因子展開

注 ・行・列に関する展開は次数下げの公式と言える．再帰的な計算が可能

列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$ ： n 次正方行列
A_{ij} ： A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n = 3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ ： } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \text{ ： 第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \text{ ： 第 } i \text{ 行に関する余因子展開} \end{aligned}$$

注 ・行・列に関する展開は次数下げの公式と言える．再帰的な計算が可能

・多項式を成分に含む行列式の計算で効果を発揮する（固有値の計算/8 章）