線形代数 I
「余因子展開」

吉冨 賢太郎

August 4, 2017

線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e. $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}|$

A_{ij} : A から i 行と j 列を除いた $2 = 3 - 1$ 次の正方行列

注 3 次の行列式の計算が 3 つの 2 次行列式の計算に帰着されている

線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 7\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot 4\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2\cdot 7\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3\cdot 4\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e. $|A| = -a_{21}|A_{21}| + a_{22}|A_{21}| - a_{23}|A_{23}|$

列・行に関する展開

$A=(a_{ij})$: n 次正方行列

A_{ij} : A の第 i 行と第 j 列を除いた $n-1$ 次正方行列

$n=3$ の場合

第 2 列に関する展開: $|A| =$

$-a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}| a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開: $|A| =$

$a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}| a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\boxed{\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| \text{ : } A \text{ の } (i,j) \text{ 余因子}}$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \text{ : 第 } j \text{ 列に関する余因子展開}$$

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta ij \text{ : 第 } i \text{ 行に関する余因子展開}$$

注 ・行・列に関する展開は次数下げの公式と言える．再帰的な計算が可能

・多項式を成分に含む行列式の計算で効果を発揮する (固有値の計算/8 章)

余因子行列

$A = (a_{ij})$ n 次正方，Δ_{ij} ： A の (i, j) 余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^{t}(\Delta_{ij})$ ： $=$ A の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \qquad |A| = 82$

$x_{11} = 2 \cdot (-61) + 3 \cdot 13 + 5 \cdot 33 = 82a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$

$(= |A|)$

$x_{22} = 4 \cdot 39 + 1 \cdot (-11) + 7 \cdot (-9) = 82$

$(= |A|)x_{33} = 3 \cdot 16 + 9 \cdot 6 + 2 \cdot (-10) = 82$

$(= |A|)x_{12} = 2 \cdot 39 + 3 \cdot (-11) + 5 \cdot (-9)$

$= 0\underline{a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}a'_{21}}\Delta'_{21} + a'_{21}\Delta'_{22} + a'_{23}\Delta'_{23} = 0$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ の行列式の第 2 行に関する展開と同じ

$\because$ A' の余因子 $\Delta'_{21}, \Delta'_{22}, \Delta'_{23}$ は $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$ と同じ