

# 線形代数 I 「余因子展開」

吉富 賢太郎

August 4, 2017

# 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i.e.  $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}|$

$A_{ij}$  :  $A$  から  $i$  行と  $j$  列を除いた  $2 = 3 - 1$  次の正方行列

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ & = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i.e.  $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}|$

$A_{ij}$  :  $A$  から  $i$  行と  $j$  列を除いた  $2 = 3 - 1$  次の正方行列

**注** 3 次の行列式の計算が 3 つの 2 次行列式の計算に帰着されている

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 1 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ & = 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ & = 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } |A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}|$$

$A_{ij}$  :  $A$  から  $i$  行と  $j$  列を除いた  $2 = 3 - 1$  次の正方行列

**注** 3 次の行列式の計算が 3 つの 2 次行列式の計算に帰着されている

## 線形性とブロック分け 例 1

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 3 \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{3} & \cancel{5} \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{4} \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{3} \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i.e.  $|A| = a_{11}|A_{11}| - a_{21}|A_{21}| + a_{31}|A_{31}|$

$A_{ij}$  :  $A$  から  $i$  行と  $j$  列を除いた  $2 = 3 - 1$  次の正方行列

**注** 3 次の行列式の計算が 3 つの 2 次行列式の計算に帰着されている

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e.

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

i.e.

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e.

## 線形性とブロック分け 例 2

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 7 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 4 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1) \cdot 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 \cdot 7 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -1 \cdot 2 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^2 7 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^3 4 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

i.e.  $|A| = -a_{21}|A_{21}| + a_{22}|A_{22}| - a_{23}|A_{23}|$

## 列・行に関する展開

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = -a_{12}|A_{12}| + a_{22}|A_{22}| - a_{32}|A_{32}|$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}|A_{31}| - a_{32}|A_{32}| + a_{33}|A_{33}|$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

## 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$|A| = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}$$

# 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

# 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in}$$

# 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開} \end{aligned}$$

# 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開} \end{aligned}$$

**注** ・行・列に関する展開は次数下げの公式と言える。再帰的な計算が可能

# 列・行に関する展開

$A = (a_{ij})$  :  $n$  次正方行列

$A_{ij}$  :  $A$  の第  $i$  行と第  $j$  列を除いた  $n - 1$  次正方行列

$n = 3$  の場合

第 2 列に関する展開:  $|A| = a_{12}\Delta_{12} + a_{22}\Delta_{22} + a_{32}\Delta_{32}$

第 3 行に関する展開:  $|A| = a_{31}\Delta_{31} + a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33}$

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}| : A \text{ の } (i, j) \text{ 余因子}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } j \text{ 列に関する余因子展開} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |A| &= a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} \\ &= \sum_{j=1}^n a_{ij}\Delta_{ij} : \text{第 } i \text{ 行に関する余因子展開} \end{aligned}$$

- 注** ・行・列に関する展開は次数下げの公式と言える。再帰的な計算が可能  
・多項式を成分に含む行列式の計算で効果を発揮する (固有値の計算/8 章)

# 余因子行列

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij}) :$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij})$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij})$$

$$x_{11} = 2 \cdot (-61) + 3 \cdot 13 + 5 \cdot 33 = 82$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij})$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

## 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{22} = 4 \cdot 39 + 1 \cdot (-11) + 7 \cdot (-9) = 82 (= |A|)$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{33} = 3 \cdot 16 + 9 \cdot 6 + 2 \cdot (-10) = 82 (= |A|)$$

## 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = 2 \cdot 39 + 3 \cdot (-11) + 5 \cdot (-9)$$

## 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = 2 \cdot 39 + 3 \cdot (-11) + 5 \cdot (-9) = 0$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}}$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \text{ の行列式の第 2 行に関する展開と同じ}$$

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a_{11}\Delta_{21} + a_{12}\Delta_{22} + a_{13}\Delta_{23}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \text{ の行列式の第 2 行に関する展開と同じ}$$


$\therefore A'$  の余因子  $\Delta'_{21}, \Delta'_{22}, \Delta'_{23}$  は  $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$  と同じ

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a'_{21}\Delta'_{21} + a'_{21}\Delta'_{22} + a'_{23}\Delta'_{23}}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{の行列式の第 2 行に関する展開と同じ} \end{array}$$

$\therefore A'$  の余因子  $\Delta'_{21}, \Delta'_{22}, \Delta'_{23}$  は  $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$  と同じ

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a'_{21}\Delta'_{21} + a'_{22}\Delta'_{22} + a'_{23}\Delta'_{23}} = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \text{ の行列式の第 2 行に関する展開と同じ}$$

$\therefore A'$  の余因子  $\Delta'_{21}, \Delta'_{22}, \Delta'_{23}$  は  $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$  と同じ

# 余因子行列

$A = (a_{ij})$   $n$  次正方,  $\Delta_{ij}$  :  $A$  の  $(i, j)$  余因子

$\tilde{A} = (\Delta_{ji}) = {}^t(\Delta_{ij})$  :  $A$  の余因子行列

3 次の場合

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} -61 & 39 & 16 \\ 13 & -11 & 6 \\ 33 & -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A\tilde{A} = X = (x_{ij}) \quad |A| = 82$$

$$x_{11} = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} (= |A|)$$

$$x_{12} = \underline{a'_{21}\Delta'_{21} + a'_{22}\Delta'_{22} + a'_{23}\Delta'_{23}} = 0$$

$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 9 & 2 \end{pmatrix}$  の行列式の第 2 行に関する展開と同じ

$\therefore A'$  の余因子  $\Delta'_{21}, \Delta'_{22}, \Delta'_{23}$  は  $\Delta_{21}, \Delta_{22}, \Delta_{23}$  と同じ

i.e.

$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E_n$$