# 線形代数 I
# 「行列式の性質」

吉冨 賢太郎

June 23, 2017

# 列基本変形と行列式

**復習**

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i,j;c)| = |A|,\ |AQ_n(i;c)| = c|A|,\ |AR_n(i,j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

**例** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -7$

**注** $A$ 三角行列 $\Rightarrow |{}^t A| = |A|$

# 行列式の乗法性

★ $|AB| = |A||B|$

$\because$ $F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$\Rightarrow F(B) = k|B| \ (k = F(E))$

$F(E) = |AE| = |A| \therefore F(B) = |A||B|$ i.e. $|AB| = |A||B|$

**例** $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10$

$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{pmatrix},$

$\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 330 - 340 = -10 = 1 \times (-10)$

**例** $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{vmatrix} = 10 \times 54 = 540$

# 転置と行列式

★ $|{}^tA| = |A|$

・基本行列については成り立つ:

$${}^tP_n(i,j;c) = P_n(j,i;c),\ |P_n(i,j;c)| = 1$$
$${}^tQ_n(i;c) = Q_n(i;c),\ |Q_n(i;c)| = c$$
$${}^tR_n(i,j) = R_n(i,j),\ |R_n(i,j)| = -1$$

・三角行列についても成り立つ (対角線の積)

・$AP_1P_2\cdots P_m = T$(三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m\cdots{}^tP_2{}^tP_1{}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式をとる $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ 行に関する基本変形と行列式

$$|P_n(i,j;c)A| = |{}^tAP_n(j,i;c)| = |{}^tA| = |A|$$
$$|Q_n(i;c)A| = |{}^tAQ_n(i;c)| = c|{}^tA| = c|A|$$
$$|R_n(i,j)A| = |{}^tAR_n(i,j)| = -|{}^tA| = -|A|$$

# 行列式とブロック分け

★ $A, D$ $n, m$ 次正方行列 $\Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$

特に $a \in M_1(\boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & * \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ * & D \end{vmatrix} = a|D|$

$\because$ $F(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}$ 多重線形性・交代性・退化性を持つ

$\Rightarrow F(A) = F(E_n)|A|$ ($E_n$ 単位行列), $F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & B \\ O & D \end{vmatrix}$

列基本変形して $F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & D \end{vmatrix}$

これを $G(D)$ とおくと，多重線形性，退化性・交代性より

$G(D) = G(E_m)|D|$, $G(E_m) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & E_m \end{vmatrix} = |E_{n+m}| = 1$

$\therefore G(D) = |D|$ $\quad \therefore F(A) = G(D)|A| = |A||D|$

**注** ・これからも三角行列の行列式が帰納的に求まる

・行列式の行や列の線形性と合わせて，行や列に関する展開が得られる (後述)

# 行列式の性質・まとめ

★ $P = P_n(i,j;c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$
★ $P = Q_n(i;c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$
★ $P = R_n(i,j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$
★ $|{}^tA| = |A|$, $|AB| = |A||B|$ $\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$

**例** $\begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5-6) = -20$

**例** $\begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9-59\cdot 8 \end{vmatrix}$
$= \begin{vmatrix} 0 & 59+18+59\cdot 16 \\ 1 & -9-59\cdot 8 \end{vmatrix} = -59\cdot 17 - 18 = -60\cdot 17 - 1 = -1021$

**例** $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$
$= -\begin{vmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & 43 & -27 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 43 & -27 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -36 \\ 14 & 3 \end{vmatrix}$
$= -(3 + 14\cdot 36) = -507$