

線形代数 I 「行列式の性質」

吉富 賢太郎

June 26, 2017

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|,$$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|,$$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix}$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix}$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -7$

列基本変形と行列式

復習

★ 多重線形性と退化性・交代性から

$$|AP_n(i, j; c)| = |A|, \quad |AQ_n(i; c)| = c|A|, \quad |AR_n(i, j)| = -|A|$$

★ 三角行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \cdots a_n$$

$$\text{例} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -7 \end{vmatrix} = -7$$

注 A 三角行列 $\Rightarrow |{}^t A| = |A|$

行列式の乗法性

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

$\therefore F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$$\Rightarrow F(B) = k|B| \quad (k = F(E))$$

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

$\therefore F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$$\Rightarrow F(B) = k|B| \quad (k = F(E))$$

$$F(E) = |AE| = |A| \therefore F(B) = |A||B| \text{ i.e. } |AB| = |A||B|$$

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

$\therefore F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$$\Rightarrow F(B) = k|B| \quad (k = F(E))$$

$$F(E) = |AE| = |A| \therefore F(B) = |A||B| \text{ i.e. } |AB| = |A||B|$$

例 $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{pmatrix},$

$$\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 330 - 340 = -10 = 1 \times (-10)$$

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

$\therefore F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$$\Rightarrow F(B) = k|B| \quad (k = F(E))$$

$$F(E) = |AE| = |A| \therefore F(B) = |A||B| \text{ i.e. } |AB| = |A||B|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 330 - 340 = -10 = 1 \times (-10)$$

$$\text{例 } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{vmatrix} = 10 \cdot 24 = 240$$

(確かめよ)

行列式の乗法性

$$\star |AB| = |A||B|$$

$\therefore F(B) = |AB| \Rightarrow F$ は多重線形性・退化性・交代性を持つ.

$$\Rightarrow F(B) = k|B| \quad (k = F(E))$$

$$F(E) = |AE| = |A| \therefore F(B) = |A||B| \text{ i.e. } |AB| = |A||B|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -10, \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 30 & 20 \\ 17 & 11 \end{vmatrix} = 330 - 340 = -10 = 1 \times (-10)$$

$$\text{例 } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -1 & 9 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 20 & 15 & 4 \\ 2 & 29 & 12 \\ -5 & 45 & 20 \end{vmatrix} = 10 \cdot 24 = 240$$

(確かめよ)

問題 まず、5~20 までの異なる整数 a, b, c で $a + b + c = 23$ となるものを自分で決めなさい。上の例を参考に行列式の値が $10a, 10b, 10c$ となるような 3 次, 4 次, 5 次の正方行列で成分に 0 を 1 つも含まないものを作れ。例えば、 $a = 10, b = 5, c = 8$ の場合は行列式 100, 50, 80 となる 3 次, 4 次, 5 次の正方行列を作ればよい。できた問題を友達と出しあつて行列式計算ジャンケンをやってみよう。

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 6 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(三角行列の行列式は転置しても同じ)

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^t A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(三角行列の行列式は転置しても同じ)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$(|P_n(i, j; c)| = |P_n(j, i; c)| = 1)$

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right|$$

(三角行列の行列式は転置しても同じ)

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$(|P_n(i, j; c)| = |P_n(j, i; c)| = 1)$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

(${}^tR_n(i, j) = R_n(i, j)$ で当然行列式も等しい)

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{array} \right|$$

(三角行列の行列式は転置しても同じ)

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

($|P_n(i, j; c)| = |P_n(j, i; c)| = 1$)

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

(${}^tR_n(i, j) = R_n(i, j)$ で当然行列式も等しい)

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right|$$

(${}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c)$ で当然行列式も等しい)

転置と行列式

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 7 & 4 & -6 \\ 9 & 6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$${}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

(三角行列の行列式は転置しても同じ)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

($|P_n(i, j; c)| = |P_n(j, i; c)| = 1$)

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(${}^tR_n(i, j) = R_n(i, j)$ で当然行列式も等しい)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

(${}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c)$ で当然行列式も等しい)

$$\therefore |{}^tA| = |A|$$

転置をとっても行列式は同じ

転置と行列式 (まとめ)

★ $|{}^tA| = |A|$

• 基本行列:
$$\begin{cases} {}^tP_n(i, j; c) = P_n(j, i; c), & |P_n(i, j; c)| = 1 \\ {}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c), & |Q_n(i; c)| = c \\ {}^tR_n(i, j) = R_n(i, j), & |R_n(i, j)| = -1 \end{cases}$$

• 三角行列についても成り立つ (対角線の積)

• $AP_1P_2 \cdots P_m = T$ (三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m \cdots {}^tP_2 {}^tP_1 {}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式を比較 $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ [応用] 行に関する基本変形と行列式

転置と行列式 (まとめ)

★ $|{}^tA| = |A|$

• 基本行列:
$$\begin{cases} {}^tP_n(i, j; c) = P_n(j, i; c), & |P_n(i, j; c)| = 1 \\ {}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c), & |Q_n(i; c)| = c \\ {}^tR_n(i, j) = R_n(i, j), & |R_n(i, j)| = -1 \end{cases}$$

• 三角行列についても成り立つ (対角線の積)

• $AP_1P_2 \cdots P_m = T$ (三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m \cdots {}^tP_2 {}^tP_1 {}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式を比較 $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ [応用] 行に関する基本変形と行列式

$$|P_n(i, j; c)A| = |{}^tAP_n(j, i; c)| = |{}^tA| = |A|$$

転置と行列式 (まとめ)

★ $|{}^tA| = |A|$

• 基本行列:
$$\begin{cases} {}^tP_n(i, j; c) = P_n(j, i; c), & |P_n(i, j; c)| = 1 \\ {}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c), & |Q_n(i; c)| = c \\ {}^tR_n(i, j) = R_n(i, j), & |R_n(i, j)| = -1 \end{cases}$$

• 三角行列についても成り立つ (対角線の積)

• $AP_1P_2 \cdots P_m = T$ (三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m \cdots {}^tP_2 {}^tP_1 {}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式を比較 $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ [応用] 行に関する基本変形と行列式

$$|P_n(i, j; c)A| = |{}^tAP_n(j, i; c)| = |{}^tA| = |A|$$

$$|Q_n(i; c)A| = |{}^tAQ_n(i; c)| = c|{}^tA| = c|A|$$

転置と行列式 (まとめ)

★ $|{}^tA| = |A|$

• 基本行列:
$$\begin{cases} {}^tP_n(i, j; c) = P_n(j, i; c), & |P_n(i, j; c)| = 1 \\ {}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c), & |Q_n(i; c)| = c \\ {}^tR_n(i, j) = R_n(i, j), & |R_n(i, j)| = -1 \end{cases}$$

• 三角行列についても成り立つ (対角線の積)

• $AP_1P_2 \cdots P_m = T$ (三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m \cdots {}^tP_2 {}^tP_1 {}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式を比較 $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ [応用] 行に関する基本変形と行列式

$$|P_n(i, j; c)A| = |{}^tAP_n(j, i; c)| = |{}^tA| = |A|$$

$$|Q_n(i; c)A| = |{}^tAQ_n(i; c)| = c|{}^tA| = c|A|$$

$$|R_n(i, j)A| = |{}^tAR_n(i, j)| = -|{}^tA| = -|A|$$

転置と行列式 (まとめ)

★ $|{}^tA| = |A|$

• 基本行列:
$$\begin{cases} {}^tP_n(i, j; c) = P_n(j, i; c), & |P_n(i, j; c)| = 1 \\ {}^tQ_n(i; c) = Q_n(i; c), & |Q_n(i; c)| = c \\ {}^tR_n(i, j) = R_n(i, j), & |R_n(i, j)| = -1 \end{cases}$$

• 三角行列についても成り立つ (対角線の積)

• $AP_1P_2 \cdots P_m = T$ (三角行列) の転置

$$\Rightarrow {}^tP_m \cdots {}^tP_2 {}^tP_1 {}^tA = {}^tT$$

両辺の行列式を比較 $\Rightarrow |{}^tA| = |A|$

★ [応用] 行に関する基本変形と行列式

$$|P_n(i, j; c)A| = |{}^tAP_n(j, i; c)| = |{}^tA| = |A|$$

$$|Q_n(i; c)A| = |{}^tAQ_n(i; c)| = c|{}^tA| = c|A|$$

$$|R_n(i, j)A| = |{}^tAR_n(i, j)| = -|{}^tA| = -|A|$$

i.e. 列と行の両方に関する基本変形を用いて計算可能

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 7 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \underline{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$$

行列式とブロック分け (まとめと証明)

行列式とブロック分け (まとめと証明)

$$\star A, D \text{ } n, m \text{ 次正方形行列} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{特に } a \in M_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & * \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ * & D \end{vmatrix} = a|D|$$

行列式とブロック分け (まとめと証明)

$$\star A, D \ n, m \text{ 次正方行列} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{特に } a \in M_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & * \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ * & D \end{vmatrix} = a|D|$$

$$\therefore F(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} \text{ 多重線形性} \cdot \text{交代性} \cdot \text{退化性を持つ}$$

$$\Rightarrow F(A) = F(E_n)|A| \ (E_n \text{ 単位行列}), \ F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & B \\ O & D \end{vmatrix}$$

$$\text{列基本変形して } F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & D \end{vmatrix}$$

これを $G(D)$ とおくと, 多重線形性, 退化性・交代性より

$$G(D) = G(E_m)|D|, \ G(E_m) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & E_m \end{vmatrix} = |E_{n+m}| = 1$$

$$\therefore G(D) = |D| \quad \therefore F(A) = G(D)|A| = |A||D|$$

行列式とブロック分け (まとめと証明)

$$\star A, D \ n, m \text{ 次正方行列} \Rightarrow \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{特に } a \in M_1(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & * \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ * & D \end{vmatrix} = a|D|$$

$$\therefore F(A) = \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} \text{ 多重線形性} \cdot \text{交代性} \cdot \text{退化性を持つ}$$

$$\Rightarrow F(A) = F(E_n)|A| \ (E_n \text{ 単位行列}), \ F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & B \\ O & D \end{vmatrix}$$

$$\text{列基本変形して } F(E_n) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & D \end{vmatrix}$$

これを $G(D)$ とおくと, 多重線形性, 退化性・交代性より

$$G(D) = G(E_m)|D|, \ G(E_m) = \begin{vmatrix} E_n & O \\ O & E_m \end{vmatrix} = |E_{n+m}| = 1$$

$$\therefore G(D) = |D| \quad \therefore F(A) = G(D)|A| = |A||D|$$

- 注** ・これから三角行列の行列式が帰納的に求まる
・行列式の行や列の線形性と合わせて, 行や列に関する展開が得られる (後述)

行列式の性質・まとめ

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & 43 & -27 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & 43 & -27 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 43 & -27 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & 43 & -27 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 43 & -27 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -36 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

行列式の性質・まとめ

$$\star P = P_n(i, j; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = |A|$$

$$\star P = Q_n(i; c) \Rightarrow |PA| = |AP| = c|A|$$

$$\star P = R_n(i, j) \Rightarrow |PA| = |AP| = -|A|$$

$$\star |{}^t A| = |A|, \quad |AB| = |A||B|, \quad \begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

$$\text{例 } \begin{vmatrix} 20 & 40 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 20(5 - 6) = -20$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 87 & 101 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 70 & 93 \\ 17 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 70 & 23 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 17 & -9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 59 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 59 + 18 + 59 \cdot 16 \\ 1 & -9 - 59 \cdot 8 \end{vmatrix} = -59 \cdot 17 - 18 = -60 \cdot 17 - 1 = -1021 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{例 } \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 7 & -4 & 3 \\ -2 & 9 & 6 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 43 & -27 \\ 1 & -19 & 12 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} 1 & -19 & 12 \\ 0 & 43 & -27 \\ 0 & 14 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 43 & -27 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -36 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -(3 + 14 \cdot 36) = -507 \end{aligned}$$