線形代数 I
「行列式の定義」

吉冨 賢太郎

June 23, 2017

3 次行列式

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ の行列式 $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ は

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

例. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 3$
$-0 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 \cdot 3 \ (= -1)$

例. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3$
$-3 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 4 - 1 \cdot 3 \cdot 3 \ (= 0)$

Q. 行列式が 0 となるのはどんなときか予想してみよう.

A. 行列の rank が 3 でない (つまり 0 か 1 か 2 の) とき

注 上の $|A|$ の式は「サラスの公式」と呼ばれる.
ここでは仮の定義式として扱い, 2 次の場合と同様, 性質を見てみよう

3 次行列式の性質

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

の性質:　　$A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3)$ とおく

(1) 各 $\boldsymbol{a}_i$ について線形 (多重線形)

　e.g. a_{11}, a_{21}, a_{31} の式として見ると定数項のない 1 次式 $\Rightarrow$ 明らか

(2) $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ を入れかえると符号が反対になる (交代性)

(3) $\boldsymbol{a}_i$ と $\boldsymbol{a}_j$ のいずれかが一致すると 0 になる (退化性)

(4) $A = E_3$ のときは $|E_3| = 1$ である.

宿題: 上の (2),(3),(4) を確かめよ.

3 次行列式の性質からの決定

3 次正方行列全体から $\boldsymbol{R}$ への写像 $f : M_3(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ が (1)〜(4) の性質を満たすとき $f(A) = |A|$ となる.

上のことを 2 次行列式の場合にならって (課題用紙の説明に沿って) 示してみよう (課題用紙参照)

$f(A)$ の多重線形性により, $f(A)$ は 27 項の和:

$$f(A) = \sum_{i,j,k=1}^{3} c_{ijk} a_{1i} a_{2j} a_{3k}, \ c_{ijk} = f(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k)$$

となる. 退化性より, i, j, k に等しいものがあるとき, $c_{ijk} = 0$ である.
したがって, 6 つの項だけのこり

$$\begin{aligned} f(A) = c_{123}a_{11}a_{22}a_{33} + c_{132}a_{11}a_{23}a_{32} + c_{213}a_{12}a_{21}a_{33} \\ +c_{231}a_{12}a_{23}a_{31} + c_{312}a_{13}a_{21}a_{32} + c_{321}a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \qquad (*)$$

となる. $c_{123} = f(E_3) = 1$ である. 交代性より, 1 回列を入れかえた c_{213}, c_{321}, c_{132} はいずれも $-c_{123} = -1$ である. また, これらからさらに 1 回入れかえてえられる c_{231}, c_{312} は 1 となる (e.g.c_{231} は c_{213} の 2 列と 3 列を入れかえ).
以上より, (*) はサラスの公式で与えられる式となる.

Q. 確かめよ.

行列式の定義

n 次正方行列全体に対して数を対応させる写像
$D : M_n(\boldsymbol{R}) \to \boldsymbol{R}$ が行列式であるとは次の条件を満たすことである:

1. $A \in M_n(\boldsymbol{R})$ の各列に関して多重線形.
2a. A の列のうち等しいものがある $\Rightarrow D(A) = 0$(退化性).
2b. $A' = AR_n(i, j)$(列の入れかえ) $\Rightarrow D(A') = -D(A)$(交代性).
3. $D(E_n) = 1$.

注 1 のもと 2a と 2b は同値であり，したがっていずれか一方を満たせよばい
2a $\Rightarrow 0 = f(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2, \ldots)$
$= f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \ldots) + f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots) + f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \ldots) + f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \ldots)$
$= f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots) + f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \ldots) \Rightarrow f(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1, \ldots) = -f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots)$
$\Rightarrow$ 2b
逆に 2b $\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \ldots) = -f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \ldots)$(1 列目,2 列目入れかえ)
$\Rightarrow f(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1, \ldots) = 0 \Rightarrow$ 2a

定義に基づいた計算

定義の条件を用いて行列式の計算ができる： $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}|$ と書く

$$D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\6\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},3\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\right)$$

$$= 3D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\right) + D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\right)$$

$$= D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},2\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\right) \quad \text{(※ i 列の c 倍を j 列に加えても不変)}$$

$$= -D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right) \quad \text{(※ 列交換は符号が変わる)}$$

$$= -D\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}\right) = D\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = 1$$

定義に基づいた計算:まとめ

$P_n(i,j;c)$ を (i,j) 成分が c の基本行列,

$Q_n(i,c)$ を (i,i) 成分が $c(\neq 0)$ の基本行列,

$R_n(i,j)$ を $(i,j),(j,i)$ 成分が 1, $(i,i),(j,j)$ 成分が 0 の基本行列

$\Rightarrow |AP_n(i,j;c)| = |A|,\ |AQ_n(i;c)| = c|A|,\ |AR_n(i,j)| = -|A|$

三角行列の行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n$ が得られる.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 5\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 3\cdot 5\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 5$$

行列式の形

線形性や交代性・退化性から具体的な形が得られる:

S_n: 全単射 $\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ の全体.
σ は順列 $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ と同一視

$$\Rightarrow |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}_\sigma \ a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \quad (\mathrm{sgn}_\sigma\text{: } \sigma \text{ の符号数})$$

符号数 : 順列 $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)]$ を 2 つずつ入れかえて, $[1, 2, \dots, n]$ に戻すときに必要な回数を N_σ として, $\mathrm{sgn}_\sigma = (-1)^{N_\sigma}$ (N_σ の偶奇は一定)

例 $[1, 2, \dots, 5]$ の順列 $[2, 5, 1, 3, 4]$

$[2, 5, 1, 3, 4] \to [1, 5, 2, 3, 4] \to [1, 2, 5, 3, 4] \to [1, 2, 3, 5, 4] \to [1, 2, 3, 4, 5]$
と 4 回で並べかえられ符号数は 1 である. 並べかえは他にも
$[2, 5, 1, 3, 4] \to [2, 4, 1, 3, 5] \to [2, 3, 1, 4, 5] \to [2, 1, 3, 4, 5] \to [1, 2, 3, 4, 5]$
$[2, 5, 1, 3, 4] \to [2, 3, 1, 5, 4] \to [1, 3, 2, 5, 4] \to [1, 2, 3, 5, 4] \to [1, 2, 3, 4, 5]$
$[2, 5, 1, 3, 4] \to [2, 5, 3, 1, 4] \to [5, 2, 3, 1, 4] \to [3, 2, 5, 1, 4] \to [1, 2, 5, 3, 4] \to$
$[1, 2, 3, 5, 4] \to [1, 2, 3, 4, 5]$ など複数あるが, 偶奇は一致する.

問題 $A = (a_{ij}) \in M_5$ の行列式において $a_{21}a_{42}a_{53}a_{14}a_{35}$ の係数は?

問題 $A = (a_{ij}) \in M_7$ の行列式において $a_{41}a_{72}a_{33}a_{24}a_{65}a_{16}a_{57}$ の係数は?