線形代数 I
「2 次の行列式」

吉冨 賢太郎

June 6, 2017

2 次行列式

2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$: A の行列式　$|A|$ または $\det(A)$ と表す.

成分を用いて $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ とも書く.

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

例. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$

例. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$

Q. 行列式が 0 となるのはどんなときか予想してみよう.

A. 行列の rank が 2 でない (つまり 1 か 0 の) とき

2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき，$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ の性質

・$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ または $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ が $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

・$(a \ \ b)$ または $(c \ \ d)$ が $(0 \ \ 0) \Rightarrow |A| = 0$

・$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ or $(a \ \ b) = (c \ \ d) \Rightarrow |A| = 0$

・列または行を入れかえると符号が反対

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

・a, c に関して定数項のない 1 次式 ($b, d,\ a, b,\ c, d$ についても同様)

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ の線型写像 (関数) $\Rightarrow$ 行列でかける．実際，

$$|A| = (d \ \ -b) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = (-c \ \ a) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

このような性質を持つものは他にあるか?

2 次行列式の決定

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$: 2 次正方行列，$f : A \mapsto f(A) \in \boldsymbol{R}$ が

1. $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ について線形 (定数項のない 1 次式) である

2. $f(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}) = 0$　　3. $f(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}) = -f(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$

4. $f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1$ を満たす $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

$\because$ 1. から $f(A) = af(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}) + cf(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix})$

$= ab\,f(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) + ad\,f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + cb\,f(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) + cd\,f(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix})$

2+3+4 $\Rightarrow f(A) = ad(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) + bcf(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$

$= (ad - bc)f(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = ad - bc$

注 1 は多重線形性，2 は退化性，3 は交代性と呼ばれる．
　多重線形性があれば (実数上では)2 と 3 は同値となる．