

# 線形代数 I

## 「2 次の行列式」

吉富 賢太郎

June 6, 2017

## 2 次行列式

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  とも書く.

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  と書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  と書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  と書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  と書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  と書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$

Q. 行列式が 0 となるのはどんなときか予想してみよう.

## 2 次行列式

2 次正方行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$ad - bc$  :  $A$  の行列式  $|A|$  または  $\det(A)$  と表す.

成分を用いて  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$  とも書く.

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$

例.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 - 2 \times 2 = -1$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 4 = -2$

例.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$

Q. 行列式が 0 となるのはどんなときか予想してみよう.

A. 行列の rank が 2 でない (つまり 1 か 0 の) とき

## 2 次行列式の性質

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- ・  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- ・  $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$
- 列または行を入れかえると符号が反対

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$
- 列または行を入れかえると符号が反対  
$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$
- $a, c$  に関して定数項のない 1 次式 ( $b, d, a, b, c, d$  についても同様)

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

・  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$

・  $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$

・  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$

・ 列または行を入れかえると符号が反対

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

・  $a, c$  に関して定数項のない 1 次式 ( $b, d, a, b, c, d$  についても同様)

$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  の線型写像 (関数)

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$

- 列または行を入れかえると符号が反対

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

- $a, c$  に関して定数項のない 1 次式  $(b, d, a, b, c, d)$  についても同様)  
 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  の線型写像 (関数)  $\Rightarrow$  行列でかける. 実際,

$$|A| = (d \ -b) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = (-c \ a) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

## 2 次行列式の性質

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  のとき,  $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$  の性質

- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  または  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  が  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 0$
- $(a \ b)$  または  $(c \ d)$  が  $(0 \ 0) \Rightarrow |A| = 0$
- $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  or  $(a \ b) = (c \ d) \Rightarrow |A| = 0$

- 列または行を入れかえると符号が反対

$$\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

- $a, c$  に関して定数項のない 1 次式  $(b, d, a, b, c, d)$  についても同様)  
 $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  の線型写像 (関数)  $\Rightarrow$  行列でかける. 実際,

$$|A| = (d \ -b) \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = (-c \ a) \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

このような性質を持つものは他にあるか?

## 2 次行列式の決定

## 2 次行列式の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : 2 次正方行列 ,  $f : A \mapsto f(A) \in \mathbf{R}$  が

1.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について線形 (定数項のない 1 次式) である

2.  $f\left(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right) = 0$       3.  $f\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

4.  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$  を満たす  $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

## 2 次行列式の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : 2 次正方行列 ,  $f : A \mapsto f(A) \in \mathbf{R}$  が

1.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について線形 (定数項のない 1 次式) である

2.  $f\left(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right) = 0$       3.  $f\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

4.  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$  を満たす  $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

$\therefore$  1. から  $f(A) = af\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + cf\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\right)$

## 2 次行列式の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : 2 次正方行列,  $f : A \mapsto f(A) \in \mathbf{R}$  が

1.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について線形 (定数項のない 1 次式) である

2.  $f\left(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right) = 0$       3.  $f\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

4.  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$  を満たす  $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

$\therefore$  1. から  $f(A) = af\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + cf\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\right)$

$= abf\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + adf\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + cbf\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + cdf\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

## 2 次行列式の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : 2 次正方行列,  $f : A \mapsto f(A) \in \mathbf{R}$  が

1.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について線形 (定数項のない 1 次式) である

2.  $f\left(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right) = 0$       3.  $f\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

4.  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$  を満たす  $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

$\therefore$  1. から  $f(A) = af\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + cf\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\right)$

$= abf\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + adf\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + cbf\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + cdf\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$2+3+4 \Rightarrow f(A) = adf\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + bcf\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= (ad - bc)f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

## 2 次行列式の決定

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  : 2 次正方行列,  $f : A \mapsto f(A) \in \mathbf{R}$  が

1.  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  と  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$  について線形 (定数項のない 1 次式) である

2.  $f\left(\begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix}\right) = 0$       3.  $f\left(\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\right) = -f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$

4.  $f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = 1$  を満たす  $\Rightarrow f(A) = |A| = ad - bc$

$\therefore$  1. から  $f(A) = af\left(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\right) + cf\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}\right)$

$= abf\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) + adf\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + cbf\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) + cdf\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

$2+3+4 \Rightarrow f(A) = adf\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) + bcf\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

$= (ad - bc)f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = ad - bc$

注 1 は多重線形性, 2 は退化性, 3 は交代性と呼ばれる。

多重線形性があれば (実数上では) 2 と 3 は同値となる。