

# 線形代数 I

## 「正則性判定と逆行列」

吉富 賢太郎

June 6, 2017

## 逆行列と連立 1 次方程式

$A$ ; 正方行列が正則  $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$  となる  $X$  が存在.

方程式  $AX = E_n$  を考える:

両辺の第  $j$  列ベクトルを比較  $\Rightarrow n$  個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$  を行に関して基本変形  $\rightarrow P(A|E_n) = (E_n|B)$

$\Rightarrow B = A^{-1}$  ( $\because PA = E_n, PE_n = B$ )

例  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  の場合

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{検算: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 2-2 \\ -6+6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

注 一般に  $\text{rank } A = n$  であれば  $AX = E_n$  は解を持つ.

## 階数と正則性

$A$  :  $n$  次正方行列,  $\text{rank } A = n \Rightarrow AX = E_n$  は解を持つ.

一般に  $\text{rank}(A) = \text{rank}({}^tA) \therefore \text{rank}({}^tA) = n$

( $\because$  一般に  $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY {}^tA {}^tX = F_{n,m}(r)$ )

$\therefore \exists Y_1, {}^tA Y_1 = E_n \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tA Y_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$  となる  $Y$  が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_n X = X$$

より,  $X = Y \therefore X = Y = A^{-1}$  特に  $\boxed{\text{rank } A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

逆に  $r = \text{rank } A < n \Rightarrow \exists P$  正則,  $PA = F_{n,n}(r)$ .

もし,  $A$  正則ならば  $PA$  正則  $\Rightarrow \exists X, F_{n,n}(r)X = E_n$ .

左辺は  $r + 1$  行から下が 0 行ベクトル  $\neq E_n \Rightarrow \Leftarrow$

$\therefore \boxed{\text{rank } A < n \Rightarrow A \text{ は正則ではない}}$

$$\boxed{\boxed{\text{rank } A = n \iff A \text{ 正則}}}$$

## 正則性判定 (まとめ)

**定理**  $n$  次正方行列  $A$  について, 以下の条件は同値. また, 以下のいずれかを満たすとき,  $X = Y = A^{-1}$

1.  $A$  は正則
2.  ${}^tA$  は正則
3.  $\text{rank } A = n$
4.  $\text{rank } {}^tA = n$
5.  $AX = E_n$  を満たす  $X$  が存在
6.  $YA = E_n$  を満たす  $Y$  が存在

## 例題 1

$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -9 \\ 4 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$  の正則性を判定し、正則ならば逆行列を求めよ。

$(A|E)$  の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する。

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left( \begin{array}{ccc|ccc} 6 & 7 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \\ &\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 1 & -3 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & * \end{array} \right) \end{aligned}$$

よって  $\text{rank } A = 2 \neq 3$  で  $A$  の階数がサイズと異なるから正則ではない。

## 例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$  の正則性を判定し、正則ならば逆行列を求めよ.

**解**  $(A|E)$  の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する.

$$(A|E) = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

$$\rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array} \right)$$

よって  $A$  は正則であり、 $A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$  (検算せよ)