線形代数 I
「正則性判定と逆行列」

吉冨 賢太郎

June 6, 2017

逆行列と連立 1 次方程式

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Longrightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow n$ 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow P(A|E_N) = (E_n|B)$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow n$ 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow B = A^{-1}$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow n$ 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow B = A^{-1}$ $(\because \ PA = E_n, PE_n = B \ )$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow n$ 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow B = A^{-1}$ ($\because$ $PA = E_n, PE_n = B$)

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow$ $P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow$ $B = A^{-1}$ $(\because \ PA = E_n, PE_n = B\ )$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow$ $P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow$ $B = A^{-1}$ $(\because\ PA = E_n, PE_n = B\ )$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow$ $P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow B = A^{-1}$ $(\because \ PA = E_n, PE_n = B\ )$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\rightarrow$ $P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow$ $B = A^{-1}$ $(\because \;\; PA = E_n, PE_n = B\;)$

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

検算: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 2-2 \\ -6+6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

逆行列と連立 1 次方程式

A; 正方行列が正則 $\Leftrightarrow$ $AX = XA = E_n$ となる X が存在.

方程式 $AX = E_n$ を考える:

両辺の第 j 列ベクトルを比較 $\Rightarrow$ n 個の連立 1 次方程式

$(A|E_n)$ を行に関して基本変形 $\longrightarrow$ $P(A|E_N) = (E_n|B)$
$\Rightarrow$ $B = A^{-1}$ ($\because$ $PA = E_n, PE_n = B$)

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ の場合

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

検算: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+4 & 2-2 \\ -6+6 & 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

注 一般に $\operatorname{rank} A = n$ であれば $AX = E_n$ は解を持つ.

階数と正則性

A : n 次正方行列,

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

$(\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$ $)$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

$(\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)\ )$

$\therefore\ {}^\exists\, Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

$(\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA\,{}^tX = F_{n,m}(r)$ $)$

$\therefore \exists\ Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n \ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore\ {}^\exists\, Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n\ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在.

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)}$ $\therefore \mathrm{rank}({}^tA) = n$

$(\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$ $)$

$\therefore {}^\exists Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n \ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)}$ $\therefore \mathrm{rank}({}^tA) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore {}^\exists Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n$ $\therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y$ $\therefore X = Y = A^{-1}$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)}$ $\therefore \mathrm{rank}({}^tA) = n$

$(\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\, {}^tA {}^tX = F_{n,m}(r)\ )$

$\therefore\ ^\exists Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n\ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y\ \therefore X = Y = A^{-1}$ 特に $\boxed{\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore {}^\exists Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n \ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y \ \therefore X = Y = A^{-1}$ 特に $\boxed{\operatorname{rank} A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

逆に $r = \operatorname{rank} A < n \Rightarrow {}^\exists P$ 正則, $PA = F_{n,n}(r)$.

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^tA)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^tA) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore\ ^{\exists}\, Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n\ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y\ \therefore X = Y = A^{-1}$ 特に $\boxed{\operatorname{rank} A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

逆に $r = \operatorname{rank} A < n \Rightarrow {}^{\exists}P$ 正則, $PA = F_{n,n}(r)$.

もし, A 正則ならば PA 正則 $\Rightarrow {}^{\exists}X$, $F_{n,n}(r)X = E_n$.

左辺は $r+1$ 行から下が 0 行ベクトル $\neq E_n \Rightarrow\Leftarrow$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\operatorname{rank} A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}({}^t\!A)}$ $\therefore \operatorname{rank}({}^t\!A) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^t\!A\,{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore {}^\exists Y_1,\ {}^t\!AY_1 = E_n \ \therefore Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^t\!AY_1) = E_n$

$\therefore YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y \ \therefore X = Y = A^{-1}$ 特に $\boxed{\operatorname{rank} A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

逆に $r = \operatorname{rank} A < n \Rightarrow {}^\exists P$ 正則, $PA = F_{n,n}(r)$.

もし, A 正則ならば PA 正則 $\Rightarrow {}^\exists X$, $F_{n,n}(r)X = E_n$.

左辺は $r+1$ 行から下が 0 行ベクトル $\neq E_n \Rightarrow\Leftarrow$

$$\therefore \boxed{\operatorname{rank} A < n \Rightarrow A \text{ は正則ではない}}$$

階数と正則性

A : n 次正方行列, $\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow AX = E_n$ は解を持つ.

一般に $\underline{\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)}$ $\therefore\ \mathrm{rank}({}^tA) = n$

($\because$ 一般に $XAY = F_{m,n}(r) \Rightarrow {}^tY\,{}^tA\,{}^tX = F_{n,m}(r)$)

$\therefore\ {}^\exists Y_1,\ {}^tAY_1 = E_n\ \therefore\ Y = {}^tY_1 \Rightarrow YA = {}^t({}^tAY_1) = E_n$

$\therefore\ YA = E_n$ となる Y が存在. ここで,

$$Y = YE_n = YAX = E_nX = X$$

より, $X = Y\ \therefore\ X = Y = A^{-1}$ 特に $\boxed{\mathrm{rank}\, A = n \Rightarrow A \text{ 正則}}$

逆に $r = \mathrm{rank}\, A < n \Rightarrow {}^\exists P$ 正則, $PA = F_{n,n}(r)$.

もし, A 正則ならば PA 正則 $\Rightarrow {}^\exists X$, $F_{n,n}(r)X = E_n$.

左辺は $r+1$ 行から下が 0 行ベクトル $\neq E_n \Rightarrow\Leftarrow$

$$\therefore\ \boxed{\mathrm{rank}\, A < n \Rightarrow A \text{ は正則ではない}}$$

$$\boxed{\boxed{\mathrm{rank}\, A = n \iff A \text{ 正則}}}$$

正則性判定 (まとめ)

正則性判定 (まとめ)

定理 n 次正方行列 A について，以下の条件は同値．また，以下のいずれかを満たすとき，$X = Y = A^{-1}$

1. A は正則
2. ${}^tA$ は正則
3. $\operatorname{rank} A = n$
4. $\operatorname{rank} {}^tA = n$
5. $AX = E_n$ を満たす X が存在
6. $YA = E_n$ を満たす Y が存在

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -9 \\ 4 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -9 \\ 4 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 7 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

例題 1

$A = \begin{pmatrix} 6 & 7 & -9 \\ 4 & 5 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 7 & -9 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -7 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \\ 0 & 1 & -3 & * \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right)$$

よって $\operatorname{rank} A = 2 \neq 3$ で A の階数がサイズと異なるから正則ではない．

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{解}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

例題 2

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{解}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

例題 2

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

例題 2

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{解}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

よって A は正則であり，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

例題 2

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -2 & -2 & -5 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ の正則性を判定し，正則ならば逆行列を求めよ．

$\boxed{\text{解}}$ $(A|E)$ の左側が被約階段行列になるように行に関して基本変形する．

$$(A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

よって A は正則であり，$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ (検算せよ)