線形代数 I
「パラメータ表示と被約階段行列」

吉冨 賢太郎

May 8, 2017

パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式) $\rightsquigarrow$ パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

問題. 1 次方程式 $x + y + z + w = 1$ のパラメータ表示を求めよ.

解は不定 $\rightsquigarrow$ いずれかの変数 (e.g. w)$= p$ (パラメータ)

方程式 : $x+y+z=1-p \quad \Rightarrow$ 依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x+y=1-p-q$: $\Rightarrow$ 依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x=1-p-q-r$: p, q, r で "確定"

$\rightsquigarrow \qquad x = 1 - p - q - r,\ y = r,\ z = q,\ w = p$

☆ "確定" するまで変数をパラメータにおく

☆ 1 つの方程式 : パラメータの数は「変数の数 −1」

☆ パラメータにおく変数はどれでもよいが, 後ろからと約束する.

パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

問題. x, y, z に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき，パラメータ表示を求めよ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x \quad +2z = 1 \\ \quad y + 3z = 4 \end{cases}$$

$z = t \rightsquigarrow$ 各方程式から

$x = 1 - 2t,\ y = 4 - 3t$:確定!

問題. x, y, z, w に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき，パラメータ表示を求めよ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x \qquad + \ \ w = -1 \\ \quad y \quad + 3w = \ \ 1 \\ \qquad z + 2w = \ \ 4 \end{cases}$$

$w = t \rightsquigarrow$ 各方程式から

$x = -1 - t,\ y = 1 - 3t,\ z = 4 - 2t$

確定!

注 ・係数行列にある特徴があるので，各方程式が独立

・パラメータの数は「変数の数 − 方程式の数」

・最初の例で (3,4) 成分が $\neq 0$ ならば解なし

被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \ldots$$

- 階段行列である
- 階段の "段の列" は基本ベクトル

例 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1 列目,2 列目が $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 1 列目が零ベクトルであってもよい.
(方程式の例: $y + z = 1$)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ と続く必要はない.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ rank 1 の行列は 1 行目を定数倍で被約階段行列

被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 列掃き出し}]{\substack{\text{1 行目} \leftrightarrow \text{2 行目交換} \\ \text{(1,1) 成分について}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{(2,2) 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\text{(1,4) 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

注　・列に関する基本変形を絶対に混ぜてはいけません.

混ぜるな危険!!

・変形を途中で止めない.

途中でやめたら，方程式は独立でなくなる

被約階段行列の一意性

★ 行列Aを被約階段行列に変形するとき，
　　結果は常に同じか? $\rightsquigarrow$ 答: 同じ

(略証) $A \to B, C$ 被約 $\Rightarrow$ $^\exists P$ 正則 $B = PC$

$\operatorname{rank} C = r$,　B, C の第 j 列を $\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{c}_j$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{b}_j = P\boldsymbol{c}_j$

P:正則 $\Rightarrow \boldsymbol{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{c}_j = \mathbf{0}$

最初の 0 でない列 j_1 $\boldsymbol{b}_{j_1} = \boldsymbol{c}_{j_1} = \boldsymbol{e}_1 \Rightarrow P\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1$
i.e. P の第 1 列は $\boldsymbol{e}_1$

同様に第 r 列まで比較 $\Rightarrow$ $P = (\boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2\ \cdots\ \boldsymbol{e}_r\ \ * \cdots *)$

C は $r+1$ 行以下は零行なので，B, C の上から第 r 行が一致，$r+1$ 行より下はどちらも零行 $\therefore$ $B = C$

被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか?　答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \to B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ の検証

$$B = (\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \boldsymbol{b}_3\ \boldsymbol{b}_4) \Rightarrow \boldsymbol{b}_3 = -\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_4 = \boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$B = PA$, P:正則 (基本行列の積) $B\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

すなわち, $A = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \boldsymbol{a}_3\ \boldsymbol{a}_4)$ についても

$\boldsymbol{a}_3 = -\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$　☞ 確かめてみよう.