

# 線形代数 I

## 「パラメータ表示と被約階段行列」

吉富 賢太郎

May 12, 2017

## パラメータ表示 (1 つの方程式)

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は？

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.  
解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式 :  $x + y + z = 1 - p$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定



# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q :$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q \Rightarrow$  依然として不定

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q \Rightarrow$  依然として不定

$y = r$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q : \Rightarrow$  依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x = 1 - p - q - r :$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示

一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q : \Rightarrow$  依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x = 1 - p - q - r : p, q, r$  で “確定”

$\rightsquigarrow x = 1 - p - q - r, y = r, z = q, w = p$

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q : \Rightarrow$  依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x = 1 - p - q - r : p, q, r$  で “確定”

$\rightsquigarrow x = 1 - p - q - r, y = r, z = q, w = p$

☆ “確定” するまで変数をパラメータにおく

# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q : \Rightarrow$  依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x = 1 - p - q - r : p, q, r$  で “確定”

$\rightsquigarrow x = 1 - p - q - r, y = r, z = q, w = p$

☆ “確定” するまで変数をパラメータにおく

☆ 1 つの方程式: パラメータの数は「変数の数 - 1」



# パラメータ表示 (1 つの方程式)

平面の方程式 (=1 次方程式)  $\rightsquigarrow$  パラメータ表示  
一般の 1 次方程式のパラメータ表示は?

**問題.** 1 次方程式  $x + y + z + w = 1$  のパラメータ表示を求めよ.

解は不定  $\rightsquigarrow$  いずれかの変数 (e.g.  $w$ ) =  $p$  (パラメータ)

方程式:  $x + y + z = 1 - p \Rightarrow$  依然として不定

$z = q \rightsquigarrow x + y = 1 - p - q : \Rightarrow$  依然として不定

$y = r \rightsquigarrow x = 1 - p - q - r : p, q, r$  で “確定”

$\rightsquigarrow x = 1 - p - q - r, y = r, z = q, w = p$

☆ “確定” するまで変数をパラメータにおく

☆ 1 つの方程式: パラメータの数は「変数の数 - 1」

☆ パラメータにおく変数はどれでもよいが、後ろからと約束する.

パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ:  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から}$$



## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = -1 - t, y = 1 - 3t, z = 4 - 2t \end{array}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = -1 - t, y = 1 - 3t, z = 4 - 2t \\ \text{確定!} \end{array}$$

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき、パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき、パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = -1 - t, y = 1 - 3t, z = 4 - 2t \\ \text{確定!} \end{array}$$

**注** ・係数行列にある特徴があるので、各方程式が独立

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = -1 - t, y = 1 - 3t, z = 4 - 2t \\ \text{確定!} \end{array}$$

**注** ・係数行列にある特徴があるので, 各方程式が独立

・パラメータの数は「変数の数 - 方程式の数」

## パラメータ表示 (方程式 2 つ以上の場合)

**問題.**  $x, y, z$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 3z = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = 1 - 2t, y = 4 - 3t : \text{確定!} \end{array}$$

**問題.**  $x, y, z, w$  に関する連立 1 次方程式の拡大係数行列が次で

与えられるとき, パラメータ表示を求めよ: 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + w = -1 \\ y + 3w = 1 \\ z + 2w = 4 \end{cases} \quad \begin{array}{l} w = t \rightsquigarrow \text{各方程式から} \\ x = -1 - t, y = 1 - 3t, z = 4 - 2t \\ \text{確定!} \end{array}$$

**注** ・係数行列にある特徴があるので, 各方程式が独立

- ・パラメータの数は「変数の数 - 方程式の数」
- ・最初の例で (3,4) 成分が  $\neq 0$  ならば解なし

# 被約階段行列

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である



## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目, 2列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目, 2列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目, 2 列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目が零ベクトルであつてもよい.  
(方程式の例:  $y + z = 1$ )

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目, 2列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目が零ベクトルであつてもよい.  
(方程式の例:  $y + z = 1$ )

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目, 2 列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目が零ベクトルであつてもよい.  
(方程式の例:  $y + z = 1$ )

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$   $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  と続く必要はない.



## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目, 2列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1列目が零ベクトルであつてもよい.  
(方程式の例:  $y + z = 1$ )

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$   $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  と続く必要はない.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

## 被約階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \dots$$

- 階段行列である
- 階段の“段の列”は基本ベクトル

例  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目, 2 列目が  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  というわけではない.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  1 列目が零ベクトルであつてもよい.  
(方程式の例:  $y + z = 1$ )

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$   $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  と続く必要はない.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  rank 1 の行列は 1 行目を定数倍で被約階段行列

## 被約階段行列への変形

## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

1 行目  $\leftrightarrow$  2 行目交換  
(1,1) 成分について  
第 1 列掃き出し

---

## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

(2,2) 成分について  
第 2 列掃き出し



## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

# 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1,4) \text{ 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$



## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1,4) \text{ 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**注** ・列に関する基本変形を絶対に混ぜてはいけません.

## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1,4) \text{ 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**注** ・列に関する基本変形を絶対に混ぜてはいけません。

**混ぜるな危険!!**

## 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1,4) \text{ 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**注** ・列に関する基本変形を絶対に混ぜてはいけません。

**混ぜるな危険!!**

・変形を途中で止めない。

# 被約階段行列への変形

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{1 \text{ 行目} \leftrightarrow 2 \text{ 行目交換} \\ (1,1) \text{ 成分について} \\ \text{第 1 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(2,2) \text{ 成分について} \\ \text{第 2 列掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{(1,4) \text{ 成分について} \\ \text{第 4 列を掃き出し}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**注** ・列に関する基本変形を絶対に混ぜてはいけません。

**混ぜるな危険!!**

・変形を途中で止めない。

途中でやめたら、方程式は独立でなくなる

# 被約階段行列の一意性

## 被約階段行列の一意性

★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,

## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき、  
結果は常に同じか？

## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき、  
結果は常に同じか？  $\rightsquigarrow$  答: 同じ



## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

$P$ : 正則  $\Rightarrow \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$

## 被約階段行列の一意性

- ★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

$P$ : 正則  $\Rightarrow \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$

最初の 0 でない列  $j_1$   $\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow P\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$

## 被約階段行列の一意性

★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

$P$ : 正則  $\Rightarrow \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$

最初の 0 でない列  $j_1$   $\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow P\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$

i.e.  $P$  の第 1 列は  $\mathbf{e}_1$

同様に第  $r$  列まで比較  $\Rightarrow P = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r \ * \ \cdots \ *)$

## 被約階段行列の一意性

★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

$P$ : 正則  $\Rightarrow \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$

最初の 0 でない列  $j_1$   $\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow P\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$

i.e.  $P$  の第 1 列は  $\mathbf{e}_1$

同様に第  $r$  列まで比較  $\Rightarrow P = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r \ * \ \cdots \ *)$

$C$  は  $r + 1$  行以下は零行なので,  $B, C$  の上から第  $r$  行が一致,  $r + 1$  行より下はどちらも零行

## 被約階段行列の一意性

★ 行列  $A$  を被約階段行列に変形するとき,  
結果は常に同じか?  $\rightsquigarrow$  答: 同じ

(略証)  $A \rightarrow B, C$  被約  $\Rightarrow \exists P$  正則  $B = PC$

$\text{rank } C = r$ ,  $B, C$  の第  $j$  列を  $\mathbf{b}_j, \mathbf{c}_j \Rightarrow \mathbf{b}_j = P\mathbf{c}_j$

$P$ : 正則  $\Rightarrow \mathbf{b}_j = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{c}_j = \mathbf{0}$

最初の 0 でない列  $j_1$   $\mathbf{b}_{j_1} = \mathbf{c}_{j_1} = \mathbf{e}_1 \Rightarrow P\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$

i.e.  $P$  の第 1 列は  $\mathbf{e}_1$

同様に第  $r$  列まで比較  $\Rightarrow P = (\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_r \ * \ \cdots \ *)$

$C$  は  $r + 1$  行以下は零行なので,  $B, C$  の上から第  $r$  行が一致,  $r + 1$  行より下はどちらも零行  $\therefore B = C$

# 被約階段行列の検算



# 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$B = PA, \ P: \text{正則 (基本行列の積)}$$

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$B = PA, \ P: \text{正則 (基本行列の積)} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$B = PA, \ P: \text{正則 (基本行列の積)} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

すなわち,  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$  についても

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$



## 被約階段行列の検算

★ 被約階段行列の検算はできるか？ 答: (ほぼ) できる.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ の検証}$$

$$B = (\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{b}_4) \Rightarrow \mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2, \ \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$$

$$\Leftrightarrow B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

$$B = PA, \ P: \text{正則 (基本行列の積)} \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

すなわち,  $A = (\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \mathbf{a}_3 \ \mathbf{a}_4)$  についても

$$\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2, \ \mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 \quad \text{☞ 確かめてみよう.}$$