線形代数 I 「階段行列と掃き出し法」

吉冨 賢太郎

May 8, 2017

階段行列

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\boxed{\text{階段行列}}$

0 行ベクトルがあればその下はすべて 0 行ベクトル，かつ

1 行目の最初に 0 でない列 $<$ 2 行目の最初に 0 でない列
$<$ 3 行目の最初に 0 でない列 $< \cdots <$ n 行目の最初に 0 でない列

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \leftarrow \\ \end{matrix} \end{array}$$

掃き出し法

☆ 任意の行列を階段行列に行基本変形を用いて変形したい

基本となる操作: 掃き出し

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 7 & 9 & 15 \\ 5 & 11 & 14 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \downarrow -\frac{3}{2} \\ \downarrow -\frac{5}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

「(1,1) 成分について，第 1 列を掃き出す」

一般に「(i, j) 成分について，第 j 列を掃き出す」

… 行基本変形の組み合わせ

「(i, j) 成分について，第 i 行を掃き出す」

… 列基本変形の組み合わせ

注 階段行列にするには，第 j 列の i 行より下のみを 0 にすればよい．
各列を順番に掃き出すことにより被約階段行列 (後述) にできる．

階段行列への変形例（1）

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 7 & 10 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第1列掃き出し}]{\text{(1,1)について}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{第3列掃き出し}]{\text{(2,3)について}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 階段行列!

階段行列への変形例 (2)

$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 14 & 7 \\ 6 & 12 & 20 & 9 \end{pmatrix}$: (1,1) 成分を使ってもよいが...

$6-5=1 \Rightarrow$ 3 行目 $+=$ 2 行目 $\times(-1)$ (“1 をつくる”)

$\Rightarrow$ 1 行目・3 行目入替え $\Rightarrow$ (1,1) 成分で掃き出し

$$\to \begin{pmatrix} 3 & 7 & 9 & 4 \\ 5 & 11 & 14 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 5 & 11 & 14 & 7 \\ 3 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 6 & -16 & -3 \\ 0 & 4 & -9 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -1 \\ 0 & 4 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$: 階段行列!

階数

行列 A 行に関して基本変形して階段行列にしたとき，
0 でない行ベクトルの数： A の階数 (rank)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank} = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank} = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank} = 1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathrm{rank} = 0$$

注 ・rank 0 の行列は零行列だけ．
・行列 A の階数 $\mathrm{rank}\, A$ は基本変形の仕方によらない．