線形代数 I 「基本変形と基本行列」

吉冨 賢太郎

May 4, 2017

基本行列と基本変形

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}}$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2, 3; -3)$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$P_3(2, 3; -3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2, 3; -3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2,3;-3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の (−3) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2, 3; -3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

※ 1 行目と 3 行目は変わっていない

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の（-3）倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2, 3; -3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

※ 1 行目と 3 行目は変わっていない

※ 2 行目に 3 行目の -3 倍が加わっている

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2,3;-3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

※ 1 行目と 3 行目は変わっていない

※ 2 行目に 3 行目の -3 倍が加わっている i.e $\boxed{\text{基本変形!}}$

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2,3;-3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

※ 1 行目と 3 行目は変わっていない

※ 2 行目に 3 行目の -3 倍が加わっている i.e $\boxed{\text{基本変形!}}$

$P_3(2,3;-3)$ ... 基本行列

基本行列と基本変形

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{3 行目の }(-3)\text{ 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = P_3(2,3;-3)$$

この行列を 3 行ある行列に左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -15 & -12 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

※ 1 行目と 3 行目は変わっていない

※ 2 行目に 3 行目の -3 倍が加わっている i.e $\boxed{\text{基本変形!}}$

$P_3(2,3;-3)$ ... 基本行列

$\boxed{\text{基本行列を左からかけると... (行に関する) 基本変形が起こる}}$

基本変形の例と基本行列 (1)

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;2)$ を左からかけると...

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2, 1; -2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2, 1; 2)$ を左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;2)$ を左からかけると...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;2)$ を左からかけると...

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 元に戻った

$P_2(2,1;-2)$ と $P_2(2,1;2)$ は互いに逆行列

(確かめてみよう)

基本変形の例と基本行列 (1)

★ ある行にある行のスカラー倍を加える

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目の (-2) 倍を 2 行目に加える}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;-2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_2(2,1;2)$ を左からかけると...

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ 元に戻った

$P_2(2,1;-2)$ と $P_2(2,1;2)$ は互いに逆行列

(確かめてみよう)

$\Longrightarrow$ 基本変形は可逆

基本変形の例と基本行列 (2)

★ ある行を (0 でない) 定数倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行目を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E_2 の 2 行目を 1/3 倍した行列 $Q_2(2; 1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

基本変形の例と基本行列 (2)

★ ある行を (0 でない) 定数倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行目を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E_2 の 2 行目を 1/3 倍した行列 $Q_2(2; 1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q_2(2; 3)$ を右辺に左からかけると

基本変形の例と基本行列 (2)

★ ある行を (0 でない) 定数倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行目を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E_2 の 2 行目を 1/3 倍した行列 $Q_2(2; 1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q_2(2; 3)$ を右辺に左からかけると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ となって元に戻る.

基本変形の例と基本行列 (2)

★ ある行を (0 でない) 定数倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行目を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E_2 の 2 行目を 1/3 倍した行列 $Q_2(2;1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q_2(2;3)$ を右辺に左からかけると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ となって元に戻る.

$Q_2(2;1/3)$ と $Q_2(2;3)$ は互いに逆行列

基本変形の例と基本行列 (2)

★ ある行を (0 でない) 定数倍する

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{2 行目を 1/3 倍する}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

E_2 の 2 行目を 1/3 倍した行列 $Q_2(2; 1/3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$Q_2(2; 3)$ を右辺に左からかけると

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ となって元に戻る.

$Q_2(2; 1/3)$ と $Q_2(2; 3)$ は互いに逆行列

(確かめよう)

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

E_2 の 1 行目と 2 行目を入れかえた行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

E_2 の 1 行目と 2 行目を入れかえた行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

左からかけてみよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

E_2 の 1 行目と 2 行目を入れかえた行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

左からかけてみよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

E_2 の 1 行目と 2 行目を入れかえた行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

左からかけてみよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

※ $R_2(1,2)R_2(1,2) = E_2$ になる

(入れかえを 2 回やったら戻る)

基本変形の例と基本行列 (3)

★ ある行とある行を入れかえる

$$\begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{1 行目と 2 行目を入れかえる}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

E_2 の 1 行目と 2 行目を入れかえた行列 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

左からかけてみよう.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 9 & 14 & 22 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 9 & 14 & 22 \end{pmatrix}$$

※ $R_2(1,2)R_2(1,2) = E_2$ になる

(入れかえを 2 回やったら戻る) $\Rightarrow$ $R_2(1,2)$ 自身が逆行列

基本行列の定義

$P_n(i,j;c)$ $(i \neq j)$: E_n の j 行の c 倍を i 行に加えたもの
E_n の (i,j) 成分が c である行列

例 $P_2(1,2;-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_3(3,2;2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, ...

$Q_n(i;c)$ $(c \neq 0)$: E_n の i 行を c 倍したもの
E_n の (i,i) 成分が c である行列

例 $Q_2(1;-1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Q_3(2;1/2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ...

$R_n(i,j)$ $(i \neq j)$: E_n の i 行と j 行を入れかえたもの
E_n の $(i,i),(j,j)$ 成分が 0, $(i,j),(j,i)$ 成分が 1

例 $R_2(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $R_3(2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$