

線形代数 I 「行列で表される写像」

吉富 賢太郎

May 2, 2017

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2$ に対して, $A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3$ が対応

写像 : $T_A : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

$A : m \times n$ 行列

$$\Rightarrow T_A : \mathbf{R}^n \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$$

$T_A : A$ の定める写像

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \mathbf{R}^m \ni \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ の性質:

$$\left. \begin{array}{l} (1) f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \\ (2) f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \boxed{\text{線形性}} \\ \text{和・スカラー倍を保つ} \end{array}$$

$$(\because A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = A\mathbf{x} + A\mathbf{y}, A(c\mathbf{x}) = cA\mathbf{x})$$

1 次写像 ($n = m$: 1 次変換) \Leftrightarrow 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換) $\left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない。

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 1 \\ y + 1 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない。

どんな写像が 1 次写像か考えてみよう

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?

(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}), f(c\mathbf{x}) = cf(\mathbf{x})$

\Rightarrow ある $n \times m$ 行列 A があつて $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

線形性を持つ写像 (和やスカラー倍を保つ写像)

= 1 次写像 (線型写像)

= 行列で定まる写像

具体的に $A = ?$

1 次変換を表す行列

$f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \quad (\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) \quad \boxed{\text{1 次結合}}$$

$$= f(x\mathbf{e}_1) + f(y\mathbf{e}_2)$$

$$= xf(\mathbf{e}_1) + yf(\mathbf{e}_2) \quad \boxed{\text{1 次結合}}$$

$$= \underbrace{(f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2))}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

一般に f が線形性を持つ \Rightarrow ある行列 A で $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$

実際 $A = (f(\mathbf{e}_1) \ f(\mathbf{e}_2) \ \cdots \ f(\mathbf{e}_n))$

1. 各基本ベクトルの写り先で写像が決まる!!

2. 1 次結合の像は像の 1 次結合

1 次写像による写り先 (像)

$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t. } f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = f(2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2)$$

$$= 2f(\mathbf{e}_1) + 3f(\mathbf{e}_2)$$

$$= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「 $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ を 60 度回転したもの」

= 「 \mathbf{x} を 60 度回転したもの」 + 「 \mathbf{y} を 60 度回転したもの」

つまり, f : 60 度回転 $\Rightarrow f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

スカラー倍もしかり \rightsquigarrow 行列で書けるはず...

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に写る

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

一般に θ 回転を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \frac{c}{2} = 2 \left(\frac{a+1}{2} \right) \therefore a = -\frac{3}{5}, \quad c = \frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0, \quad \frac{d+1}{2} = 2 \left(\frac{b}{2} \right) \therefore b = \frac{4}{5}, \quad d = \frac{3}{5}$$

よつて、 $y = 2x$ に関する対象移動を表す行列は: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

注 もちろん、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の移動先を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおいて同様にやると

$$X = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \quad Y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y \text{ が得られ, 行列が求まる.}$$

対称移動 (別解)

$f: y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 $A \rightsquigarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 つにまとめて $A \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \therefore A &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 = 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の midpoint

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) &= \frac{1}{2}(f(\mathbf{x}) + \text{Id}(\mathbf{x})) \\ &= \frac{1}{2}(A\mathbf{x} + E\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\mathbf{x}: \text{線形写像} \end{aligned}$$

$$\text{e.g. } \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

A, B : 1次写像 $f, g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$ を表す行列, $c \in \mathbf{R}$

和 $f+g$ を $(f+g): \mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x})+g(\mathbf{x})$ で定義

$\rightsquigarrow f+g$ を表す行列は $A+B$

スカラー倍 cf を $(cf)(\mathbf{x}) = c(f(\mathbf{x}))$ で定義

$\rightsquigarrow cf$ を表す行列は cA

合成と行列の積

$$f = T_A : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad g = T_B : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

(A : 2次正方, B : 2×3)

$$f \circ g(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) : \text{1次写像の合成}$$

$$= A(g(\mathbf{x})) = A(B\mathbf{x})$$

$$= (AB)\mathbf{x} \quad (\text{結合法則}) = T_{AB}(\mathbf{x})$$

i.e. 1次写像の合成は線形で、表す行列は行列の積

例 $y = x$ に関する対称移動:

(45° 回転) \circ (x 軸対称) \circ (-45° 回転)

$$\begin{aligned} \text{表す行列} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$