線形代数 I 「行列で表される写像」

吉冨 賢太郎

May 2, 2017

行列の定める写像

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が対応

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が対応

$$\text{写像}：\ T_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 3x+5y \\ x+2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が対応

写像： $T_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$

A ： $m \times n$ 行列

$\Rightarrow$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が対応

$$写像：\ T_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

A : $m \times n$ 行列

$$\Rightarrow \boxed{T_A : \boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m}$$

行列の定める写像

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 3y \\ 3x + 5y \\ x + 2y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^3$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \boldsymbol{R}^2$ に対して，$A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^3$ が対応

$$\text{写像}：\ T_A : \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$$

A：$m \times n$ 行列

$$\Rightarrow \boxed{T_A : \boldsymbol{R}^n \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^m}$$

T_A：A の定める写像

線形性と 1 次写像 (線形写像)

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

(1) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

(1) $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(2) $f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x})$

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{線形性}}$$

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \quad \boxed{\text{線形性}}$$

和・スカラー倍を保つ

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{線形性}}$

和・スカラー倍を保つ

$$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$$

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{線形性}}$

和・スカラー倍を保つ

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{\text{線形性}} \\ \text{和・スカラー倍を保つ} \end{array}$$

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換)

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{\text{線形性}} \\ \text{和・スカラー倍を保つ} \end{array}$$

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換) $\left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{線形性}}$

和・スカラー倍を保つ

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換) $\left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$

例. $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない.

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{線形性}}$

和・スカラー倍を保つ

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換) $\left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない.

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない.

線形性と 1 次写像 (線形写像)

$f = T_A : \boldsymbol{R}^m \ni \boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$ の性質:

$$\left.\begin{array}{l} (1)\ f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}) \\ (2)\ f(c\boldsymbol{x}) = c\,f(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \boxed{\text{線形性}} \\ \text{和・スカラー倍を保つ} \end{array}$$

$(\because\ A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A\boldsymbol{x} + A\boldsymbol{y},\ A(c\boldsymbol{x}) = cA\boldsymbol{x})$

1 次写像 ($n = m$:1 次変換) $\Leftrightarrow$ 線形性を持つ写像 (変換)

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$: 1 次写像 (変換) $\left(= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない.

例. $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+1 \\ y+1 \end{pmatrix}$ は 1 次写像ではない.

どんな写像が 1 次写像か考えてみよう

1 次写像の正体

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?
(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?

(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \longrightarrow \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}),\ f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?
(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

$\Rightarrow$ ある $n \times m$ 行列 A があって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?

(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

$\Rightarrow$ ある $n \times m$ 行列 A があって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

線形性を持つ写像 (和やスカラー倍を保つ写像)

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?
(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ
i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$
$\Rightarrow$ ある $n \times m$ 行列 A があって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

線形性を持つ写像 (和やスカラー倍を保つ写像)
$=$ 1 次写像 (線型写像)

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?

(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}),\, f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

$\Rightarrow$ ある $n \times m$ 行列 A があって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

線形性を持つ写像 (和やスカラー倍を保つ写像)
= 1 次写像 (線型写像)
= 行列で定まる写像

1 次写像の正体

Q. 1 次写像はどのような写像か?

(行列で表わされる写像以外に 1 次写像はあるか?)

A. $f : \boldsymbol{R}^m \to \boldsymbol{R}^n$ が線形性を持つ

i.e. $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}),\ f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$

$\Rightarrow$ ある $n \times m$ 行列 A があって $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

線形性を持つ写像 (和やスカラー倍を保つ写像)
$=$ 1 次写像 (線型写像)
$=$ 行列で定まる写像

具体的に $A =$?

1 次変換を表す行列

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2)$$

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) \qquad \boxed{\text{1 次結合}}$$

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) \qquad \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1 次結合}}$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad (\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= (f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2)) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f:\boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underline{(f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2))} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2))}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{1\text{ 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{1\text{ 次結合}} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\leadsto$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad (\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

一般に f が線形性を持つ

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) & \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) & \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} f(\boldsymbol{e}_1) & f(\boldsymbol{e}_2) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

一般に f が線形性を持つ $\Rightarrow$ ある行列 A で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\leadsto$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad (\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2))}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

一般に f が線形性を持つ $\Rightarrow$ ある行列 A で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

実際 $A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n))$

1 次変換を表す行列

$f: \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{(f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2))}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

一般に f が線形性を持つ $\Rightarrow$ ある行列 A で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

実際 $A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ f(\boldsymbol{e}_2)\ \cdots\ f(\boldsymbol{e}_n))$

1. $\boxed{\text{各基本ベクトルの写り先で写像が決まる!!}}$

1 次変換を表す行列

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換 $\rightsquigarrow$ $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ となる A がある.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 \quad \left(\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= f(x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= f(x\boldsymbol{e}_1) + f(y\boldsymbol{e}_2) \\ &= xf(\boldsymbol{e}_1) + yf(\boldsymbol{e}_2) && \boxed{\text{1 次結合}} \\ &= \underbrace{(f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2))}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

一般に f が線形性を持つ $\Rightarrow$ ある行列 A で $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$

実際 $A = (f(\boldsymbol{e}_1)\ \ f(\boldsymbol{e}_2)\ \ \cdots\ \ f(\boldsymbol{e}_n))$

1. $\boxed{\text{各基本ベクトルの写り先で写像が決まる!!}}$
2. $\boxed{\text{1 次結合の像は像の 1 次結合}}$

1 次写像による写り先 (像)

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t. } f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t. } f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t.}\ \ f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2)$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t.}\quad f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) &= f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) \end{aligned}$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t.}\quad f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t.} \quad f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}) &= f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1 次写像による写り先 (像)

$f : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2$ 1 次変換

$$\text{s.t. } f(\boldsymbol{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ f(\boldsymbol{e}_2) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) &= f(2\boldsymbol{e}_1 + 3\boldsymbol{e}_2) \\ &= 2f(\boldsymbol{e}_1) + 3f(\boldsymbol{e}_2) \\ &= \underline{2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

平面の 1 次変換 (回転)

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

$=$ 「$\boldsymbol{x}$ を 60 度回転したもの」$+$「$\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

$$\text{「}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\text{ を 60 度回転したもの」}$$

$$= \text{「}\boldsymbol{x}\text{ を 60 度回転したもの」}+\text{「}\boldsymbol{y}\text{ を 60 度回転したもの」}$$

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

$=$ 「$\boldsymbol{x}$ を 60 度回転したもの」$+$「$\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

スカラー倍もしかり

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

$$\text{「}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\text{ を 60 度回転したもの」}$$

$$= \text{「}\boldsymbol{x}\text{ を 60 度回転したもの」}+\text{「}\boldsymbol{y}\text{ を 60 度回転したもの」}$$

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

スカラー倍もしかり $\rightsquigarrow$ 行列で書けるはず...

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

$=$ 「$\boldsymbol{x}$ を 60 度回転したもの」$+$「$\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

スカラー倍もしかり $\rightsquigarrow$ 行列で書けるはず...

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に写る

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

$=$ 「$\boldsymbol{x}$ を 60 度回転したもの」$+$「$\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

スカラー倍もしかり $\rightsquigarrow$ 行列で書けるはず...

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ に写る

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

平面の 1 次変換 (回転)

回転: 明らかに線形性を持つ:

「$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

$=$ 「$\boldsymbol{x}$ を 60 度回転したもの」$+$「$\boldsymbol{y}$ を 60 度回転したもの」

つまり, f :60 度回転 $\Rightarrow f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=f(\boldsymbol{x})+f(\boldsymbol{y})$

スカラー倍もしかり $\rightsquigarrow$ 行列で書けるはず...

$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ は $\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ に写る

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

一般に θ 回転を表す行列は $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

平面の 1 次変換 (対称移動)

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0, \ \frac{c}{2} = 2(\frac{a+1}{2})$$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0,\ \dfrac{c}{2} = 2(\dfrac{a+1}{2})\ \therefore a = -\dfrac{3}{5},\ c = \dfrac{4}{5}$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0,\ \frac{c}{2} = 2\left(\frac{a+1}{2}\right)\ \therefore\ a = -\frac{3}{5},\ c = \frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = 0,\ \frac{d+1}{2} = 2\left(\frac{b}{2}\right)$$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0,\ \frac{c}{2} = 2(\frac{a+1}{2})\ \therefore a = -\frac{3}{5},\ c = \frac{4}{5}$$

$$(\begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = 0,\ \frac{d+1}{2} = 2(\frac{b}{2})\ \therefore b = \frac{4}{5},\ d = \frac{3}{5}$$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=0,\ \frac{c}{2}=2\left(\frac{a+1}{2}\right)\ \therefore a=-\frac{3}{5},\ c=\frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=0,\ \frac{d+1}{2}=2\left(\frac{b}{2}\right)\ \therefore b=\frac{4}{5},\ d=\frac{3}{5}$$

よって, $y = 2x$ に関する対象移動を表す行列は: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

平面の 1 次変換 (対称移動)

原点を通る直線についての対称移動は明らかに線形性を持つ:

例 $y = 2x$ に関する対象移動

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ と対称な点を $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ とおく

$$\left(\begin{pmatrix} a-1 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=0,\ \frac{c}{2}=2\left(\frac{a+1}{2}\right)\ \therefore a=-\frac{3}{5},\ c=\frac{4}{5}$$

$$\left(\begin{pmatrix} b \\ d-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)=0,\ \frac{d+1}{2}=2\left(\frac{b}{2}\right)\ \therefore b=\frac{4}{5},\ d=\frac{3}{5}$$

よって，$y = 2x$ に関する対象移動を表す行列は: $\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

注 もちろん，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ の移動先を $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ とおいて同様にやると

$X = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y$, $Y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$ が得られ，行列が求まる.

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:
f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 A $\rightsquigarrow$

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 $A \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 A $\rightsquigarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 つにまとめて $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 $A \rightsquigarrow A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

1 つにまとめて $A\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$

$\therefore\ A = \begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}$

対称移動 (別解)

f: $y = 2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 $A \rightsquigarrow A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

1 つにまとめて $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

対称移動 (別解)

f: $y=2x$ に関する対称移動:

f は $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ に, $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ に写す

f を表す行列 $A \rightsquigarrow A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $A\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$

1 つにまとめて $A\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\2&-1\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-2\\-2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-4&-3\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-3&4\\4&3\end{pmatrix}$$

正射影/行列の和とスカラー倍

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 = 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\ &= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$

$$= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 ＝ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}
\end{aligned}
$$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか？ もつなら表す行列は？

正射影 p の像 ＝ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$

$$= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}$$

e.g. $\dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 ＝ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$
$$= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}$$

e.g. $\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか？ もつなら表す行列は？

正射影 p の像 ＝ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\ &= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A+E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像} \end{aligned}$$

$$\text{e.g. } \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

A, B : 1 次写像 $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を表す行列, $c \in \boldsymbol{R}$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$

$$= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}$$

$$\text{e.g. } \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

A, B : 1 次写像 $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を表す行列, $c \in \boldsymbol{R}$

和 $f+g$ を $(f+g) : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 ＝ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}: \text{ 線形写像}
\end{aligned}
$$

e.g. $$\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

A, B : 1 次写像 $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を表す行列, $c \in \boldsymbol{R}$

和 $f+g$ を $(f+g) : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義

$\rightsquigarrow$ $f+g$ を表す行列は $A+B$

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$
\begin{aligned}
p(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x})) \\
&= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}
\end{aligned}
$$

$$
\text{e.g. } \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}
$$

A, B : 1 次写像 $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を表す行列, $c \in \boldsymbol{R}$

和 $f+g$ を $(f+g) : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義

$\rightsquigarrow$ $f+g$ を表す行列は $A+B$

スカラー倍 cf を $(cf)(\boldsymbol{x})=c(f(\boldsymbol{x}))$ で定義

正射影/行列の和とスカラー倍

Q. 正射影は線形性をもつか? もつなら表す行列は?

正射影 p の像 $=$ 対称移動 f の像と恒等写像 Id の像の中点

$$p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(f(\boldsymbol{x}) + \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}))$$

$$= \frac{1}{2}(A\boldsymbol{x} + E\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}(A + E)\boldsymbol{x}\text{: 線形写像}$$

e.g. $\displaystyle \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

A, B : 1 次写像 $f, g : \boldsymbol{R}^n \to \boldsymbol{R}^m$ を表す行列, $c \in \boldsymbol{R}$

和 $f+g$ を $(f+g) : \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{x})$ で定義

$\rightsquigarrow$ $f+g$ を表す行列は $A+B$

スカラー倍 cf を $(cf)(\boldsymbol{x})=c(f(\boldsymbol{x}))$ で定義

$\rightsquigarrow$ cf を表す行列は cA

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

合成と行列の積

$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$

(A:2 次正方，B:2×3)

$f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$: 1 次写像の合成

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$\begin{aligned} f \circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) : \text{1 次写像の合成} \\ &= A(g(\boldsymbol{x})) \end{aligned}$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$$ ： 1 次写像の合成

$$= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x})$$

合成と行列の積

$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$\begin{aligned} f \circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) \ : \ 1\text{ 次写像の合成} \\ &= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\ &= (AB)\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方, B:2×3)

$$\begin{aligned} f\circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) \ : \ 1 \text{ 次写像の合成} \\ &= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\ &= (AB)\boldsymbol{x} \quad (\text{結合法則}) \end{aligned}$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$\begin{aligned} f \circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) : \text{1 次写像の合成} \\ &= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\ &= (AB)\boldsymbol{x} \quad \text{(結合法則)} = T_{AB}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$\begin{aligned} f\circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) \ :\ 1\text{ 次写像の合成} \\ &= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\ &= (AB)\boldsymbol{x} \quad (\text{結合法則}) = T_{AB}(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\text{1 次写像の合成は線形で，表す行列は行列の積}}$

合成と行列の積

$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$
\begin{aligned}
f \circ g(\boldsymbol{x}) &= f(g(\boldsymbol{x})) : \text{1 次写像の合成} \\
&= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x}) \\
&= (AB)\boldsymbol{x} \quad (\text{結合法則}) = T_{AB}(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

i.e. $\boxed{\text{1 次写像の合成は線形で，表す行列は行列の積}}$

例 $y = x$ に関する対称移動:

(45° 回転)$\circ$ (x 軸対称) $\circ$ ($-45°$ 回転)

合成と行列の積

$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$

(A:2 次正方，B:2×3)

$f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$: 1 次写像の合成

$= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x})$

$= (AB)\boldsymbol{x}$ (結合法則) $= T_{AB}(\boldsymbol{x})$

i.e. $\boxed{\text{1 次写像の合成は線形で，表す行列は行列の積}}$

例 $y = x$ に関する対称移動:

(45° 回転)$\circ$ (x 軸対称) $\circ$ ($-45°$ 回転)

表す行列 $= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))\ :\ 1 \text{ 次写像の合成}$$
$$= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x})$$
$$= (AB)\boldsymbol{x} \quad (\text{結合法則}) = T_{AB}(\boldsymbol{x})$$

i.e. $\boxed{\text{1 次写像の合成は線形で，表す行列は行列の積}}$

例 $y = x$ に関する対称移動:

(45° 回転)$\circ$ (x 軸対称) $\circ$ ($-45°$ 回転)

$$\text{表す行列} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

合成と行列の積

$$f = T_A : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2,\ g = T_B : \boldsymbol{R}^3 \to \boldsymbol{R}^2$$

(A:2 次正方，B:2×3)

$$f \circ g(\boldsymbol{x}) = f(g(\boldsymbol{x}))$$ ： 1 次写像の合成

$$= A(g(\boldsymbol{x})) = A(B\boldsymbol{x})$$

$$= (AB)\boldsymbol{x} \quad (\text{結合法則}) = T_{AB}(\boldsymbol{x})$$

i.e. $\boxed{\text{1 次写像の合成は線形で，表す行列は行列の積}}$

例 $y = x$ に関する対称移動:

(45° 回転)∘ (x 軸対称) ∘ (−45° 回転)

$$\text{表す行列} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$